Популярные лекции
по математике

А. С. СОЛОДОВНИКОВ

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 48

А. С. СОЛОДОВНИКОВ

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1977

512
С 60
УДК 512

АННОТАЦИЯ

В книге рассказывается о связи между системами линейных неравенств и выпуклыми многогранниками, дается описание множества всех решений системы линейных неравенств, изучаются вопросы совместности и несовместности; наконец, дается понятие о линейном программировании как об одной из глав теории систем линейных неравенств. В последнем параграфе дается доказательство теоремы двойственности линейного программирования.

Книга рассчитана на школьников старших классов и всех любителей математики.

Александр Самуилович Солодовников

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

(Серия: «Популярные лекции по математике»)

М., 1977 г., 112 стр. с илл.

Редактор *В. В. Донченко*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр* Корректор *В. П. Сорокина*

Сдано в набор 15.07.77. Подписано к печати 29.11.77. Бумага 84×108¹/₃₂ тип. № 1. Физ. печ. л. 3,5. Усл. печ. л. 5,88. Уч-изд. л. 5,19. Тираж 130 000 экз. Цена книги 15 коп. Заказ № 681

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

С $\frac{20202-007}{053(02)-78}$ 80-78

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1977, с изменениями

ПРЕДИСЛОВИЕ

Неравенства первой степени, или, как принято их называть, *линейные неравенства*, — это неравенства вида

$$ax + by + c \geqslant 0$$

(для простоты мы написали неравенство с двумя неизвестными x и y). Теория систем линейных неравенств — небольшой, но весьма увлекательный раздел математики. Интерес к нему обусловлен в значительной мере красотой геометрического содержания, ибо в переводе на геометрический язык задание системы линейных неравенств с двумя или тремя неизвестными означает задание выпуклой многоугольной области на плоскости или, соответственно, выпуклого многогранного тела в пространстве. Тем самым, например, учение о выпуклых многогранниках — древняя, как мир, часть геометрии — превращается в одну из глав теории систем линейных неравенств. Имеются в этой теории и разделы, близкие сердцу алгебраиста; к ним относится, например, замечательная аналогия между свойствами систем линейных неравенств и свойствами систем *линейных уравнений* (все, что связано с последними, изучено очень давно и очень подробно).

До недавнего времени можно было думать, что линейные неравенства так и останутся объектом чисто математического творчества. Положение коренным образом изменилось начиная с середины 40-х годов этого столетия, когда возникла новая область прикладной математики — *линейное программирование* — с важными приложениями в экономике и технике. В конечном счете линейное программирование — это всего лишь один из разделов (хотя и очень важный) теории систем линейных неравенств.

Эта небольшая книга как раз и ставит своей целью ознакомить читателя с различными аспектами теории систем линейных неравенств: с геометрической стороной вопроса и тесно связанными с нею методами решения систем, с некоторыми чисто алгебраическими свойствами систем, с вопросами линейного программирования. Для чтения ее не нужно никаких знаний, превышающих школьный курс математики.

Коснемся в нескольких словах истории освещенных в этой книге вопросов.

Хотя по своему предмету теория систем линейных неравенств должна, казалось бы, относиться к самым основным и элементарным разделам математики, до последнего времени ею занимались сравнительно мало. Начиная с последних лет прошлого века, изредка появлялись работы, в которых освещались те или иные свойства систем линейных неравенств. Можно отметить в этой связи имена таких математиков, как Г. Минковский (один из крупнейших геометров конца прошлого и начала этого столетия, особенно известен своими работами по выпуклым множествам и как автор «геометрии Минковского»), Г. Ф. Вороной (один из родоначальников «петербургской школы теории чисел»), А. Хаар (венгерский математик, получил известность благодаря работам по «интегрированию на группах»), Г. Вейль (один из наиболее выдающихся математиков первой половины нашего века, о его жизни и деятельности можно прочитать в брошюре И. М. Я г л о м а «Герман Вейль», изд-во «Знание», М., 1967). Некоторые из полученных ими результатов в той или иной мере нашли отражение в настоящей книге (хотя и без упоминания об их авторах).

По-настоящему интенсивное развитие теории систем линейных неравенств началось лишь в 40—50-х годах этого столетия, когда бурный рост прикладных дисциплин (линейное, выпуклое и другие разновидности «математического программирования», так называемая «теория игр» и т. д.) сделал необходимым углубленное и систематическое изучение линейных неравенств. В настоящее время полный список статей и книг по линейным неравенствам насчитывал бы, вероятно, сотни различных названий.

§ 1. НЕСКОЛЬКО ФАКТОВ ИЗ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1°. *Операции над точками.* Введем на плоскости прямоугольную систему координат. Тот факт, что точка M имеет в этой системе координаты x и y, мы записываем следующим образом:

$$M = (x, y) \text{ или же просто } M(x, y).$$

Наличие координатной системы позволяет производить над точками плоскости некоторые операции, а именно операцию сложения точек и операцию умножения точки на число.

Сложение точек определяется так: если $M_1 = (x_1, y_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2)$, то

$$M_1 + M_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2).$$

Таким образом, сложение точек сводится к сложению их одноименных координат.

Геометрический смысл этой операции очень прост (рис. 1): точка $M_1 + M_2$ есть четвертая вершина параллелограмма, построенного на отрезках OM_1 и OM_2 как на сторонах (O — начало координат). Остальными тремя вершинами параллелограмма являются M_1, O, M_2.

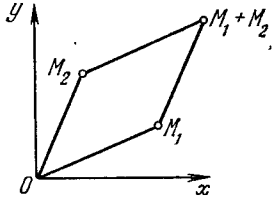

Рис. 1.

То же самое можно, впрочем, сказать и по-другому: точка $M_1 + M_2$ получается из точки M_2 путем параллельного переноса в направлении отрезка OM_1 на величину, равную длине этого отрезка.

Умножение точки $M(x, y)$ на произвольное число k производится по следующему правилу:

$$kM = (kx, ky).$$

Геометрический смысл этой операции еще проще, чем в случае сложения: при $k > 0$ точка $M' = kM$ лежит на луче OM, причем $OM' = k \cdot OM$; при $k < 0$ точка M' лежит на продолжении луча OM за точку O, причем $OM' = |k| \cdot OM$ (рис. 2).

Вывод указанного выше геометрического истолкования обеих операций послужит неплохим упражнением для читателя *).

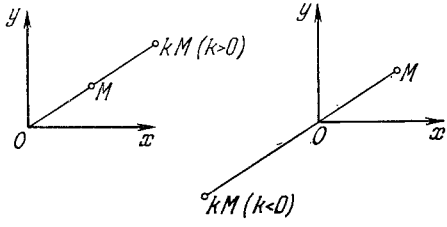

Рис. 2.

Введенные нами операции очень удобны для перевода геометрических фактов на язык алгебры. Приведем несколько примеров такого перевода.

1) *Отрезок M_1M_2 состоит из всех точек вида*

$$s_1M_1 + s_2M_2,$$

где s_1, s_2 — любые два неотрицательных числа, сумма которых равна 1.

Здесь чисто геометрический факт — принадлежность точки отрезку M_1M_2 — записывается в виде алгебраического соотношения $M = s_1M_1 + s_2M_2$ с указанными выше ограничениями на s_1, s_2.

Для доказательства рассмотрим произвольную точку M на отрезке M_1M_2. Проведя через M прямые, параллельные OM_2 и OM_1, получим точку N_1 на отрезке OM_1 и точку N_2 на отрезке OM_2 (рис. 3). Пусть

$$s_1 = \frac{M_2M}{M_2M_1}, \qquad s_2 = \frac{M_1M}{M_1M_2};$$

*) Если только читатель не знаком с основами учения о векторах. С векторной точки зрения наши операции, как известно, означают следующее: точка $M_1 + M_2$ есть конец вектора $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$, а точка kM — конец вектора $k \cdot \overrightarrow{OM}$ (при условии, что началом этого вектора является точка O).

числа s_1 и s_2 неотрицательны и в сумме дают 1. Из подобия соответствующих треугольников находим

$$\frac{ON_1}{OM_1} = \frac{M_2M}{M_2M_1} = s_1, \qquad \frac{ON_2}{OM_2} = \frac{M_1M}{M_1M_2} = s_2,$$

откуда следует $N_1 = s_1M_1$, $N_2 = s_2M_2$. Но $M = N_1 + N_2$, следовательно, $M = s_1M_1 + s_2M_2$. Наконец, заметим, что, когда точка M пробегает отрезок M_1M_2 в направлении от M_1 к M_2, число s_2 пробегает все значения от 0 до 1. Предложение 1) доказано.

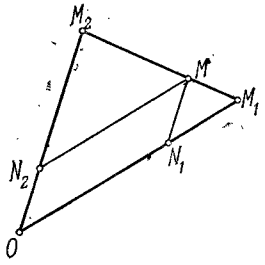

Рис. 3.

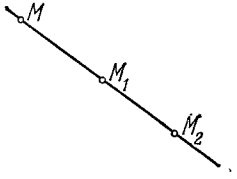

Рис. 4.

2) *Любая точка M прямой M_1M_2 представляется в виде*

$$tM_1 + (1 - t)\,M_2,$$

где t — некоторое число.

В самом деле, если точка M лежит на отрезке M_1M_2, то наше утверждение следует из доказанного выше. Пусть M лежит вне отрезка M_1M_2. Тогда либо точка M_1 лежит на отрезке MM_2 (как на рис. 4), либо M_2 лежит на отрезке MM_1. Предположим, например, что имеет место первый случай. Тогда, по доказанному,

$$M_1 = sM + (1 - s)\,M_2 \qquad (0 < s < 1).$$

Отсюда

$$M = \frac{1}{s}\,M_1 - \frac{1 - s}{s}\,M_2 = tM_1 + (1 - t)\,M_2,$$

где $t = \frac{1}{s}$. Случай, когда M_2 лежит на отрезке MM_1, предоставляем рассмотреть читателю.

3) *Когда параметр s возрастает от 0 до ∞, точка sB пробегает луч OB *), а точка $A + sB$ — луч, выходящий из A в направлении OB. Когда s убывает от 0 до $-\infty$, точки sB и $A + sB$ пробегают лучи, дополнительные к указанным выше.* Для доказательства достаточно взглянуть на рис. 5 и 6.

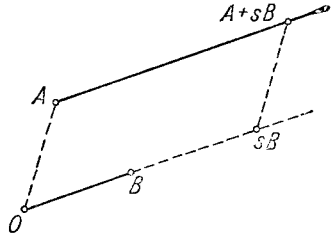

Рис. 5.

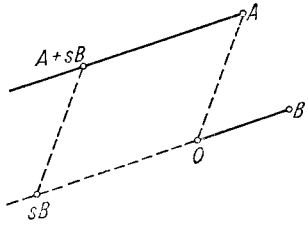

Рис. 6.

Из предложения 3) вытекает, что при изменении s от $-\infty$ до $+\infty$ точка $A + sB$ пробегает прямую, проходящую через A параллельно OB.

Операции сложения и умножения на число можно, разумеется, производить и над точками в пространстве. В этом случае, по определению,

$$M_1 + M_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2),$$
$$kM = (kx,\ ky,\ kz).$$

Все предложения, доказанные выше, очевидно, будут справедливы и в пространстве.

В заключение этого раздела примем одно соглашение, которое поможет нам в дальнейшем формулировать многие факты более ясно и лаконично. Именно, если $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ — какие-либо два множества точек (на плоскости или в пространстве), то условимся под их «суммой» $\mathcal{K} + \mathcal{L}$ понимать совокупность всех точек вида $K + L$, где K — произвольная точка из $\mathcal{K}$, а L — произвольная точка из $\mathcal{L}$.

В математике давно уже применяется специальная запись для обозначения принадлежности какой-либо точки данному множеству. А именно, для того чтобы указать, что точка M принадлежит множеству $\mathcal{M}$, пи-

*) Предполагается, что точка B отлична от начала координат O.

шут $M \in \mathcal{M}$ (знак $\in$ заменяет слово «принадлежит»). Итак, $\mathcal{K} + \mathcal{L}$ есть множество всех точек вида $K + L$, где $K \in \mathcal{K}$, а $L \in \mathcal{L}$.

Исходя из геометрического смысла сложения точек, можно дать простое правило для сложения точечных множеств $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$. Это правило заключается в следующем: нужно для каждой точки $K \in \mathcal{K}$ построить множество, получающееся из $\mathcal{L}$ параллельным переносом на отрезок OK, затем все полученные таким образом множества объединить в одно. Это последнее и будет $\mathcal{K} + \mathcal{L}$.

Укажем несколько примеров.

1. Пусть множество $\mathcal{K}$ состоит из одной точки K, в то время как $\mathcal{L}$ — какое угодно множество точек.

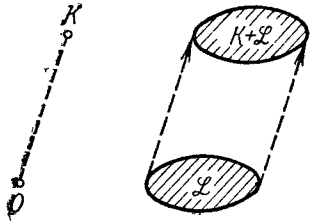

Рис. 7.

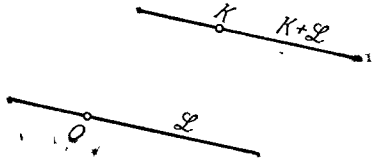

Рис. 8.

Множество $K + \mathcal{L}$ есть результат параллельного переноса множества $\mathcal{L}$ на отрезок OK (рис. 7). В частности, если $\mathcal{L}$ — прямая, то $K + \mathcal{L}$ — прямая, параллельная $\mathcal{L}$. Если при этом прямая $\mathcal{L}$ проходит через начало координат, то $K + \mathcal{L}$ есть прямая, параллельная $\mathcal{L}$ и проходящая через точку K (рис. 8).

2. $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ — отрезки (на плоскости или в пространстве), не параллельные между собою (рис. 9). Тогда множество $\mathcal{K} + \mathcal{L}$ — параллелограмм со сторонами, равными и параллельными $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ (соответственно). Что получится в случае, когда отрезки $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ параллельны?

3. $\mathcal{K}$ — плоскость, а $\mathcal{L}$ — не параллельный ей отрезок. Множество $\mathcal{K} + \mathcal{L}$ есть часть пространства, заключенная между двумя плоскостями, параллельными $\mathcal{K}$ (рис. 10).

4. $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ — круги радиусов r_1 и r_2 с центрами P_1 и P_2 (соответственно), лежащие в одной плоскости π.

Тогда $\mathcal{K} + \mathcal{L}$ — круг радиуса $r_1 + r_2$ с центром в точке $P_1 + P_2$, лежащий в плоскости, параллельной π (рис. 11).

2°. *Геометрический смысл уравнения и неравенства первой степени с двумя или тремя неизвестными.*

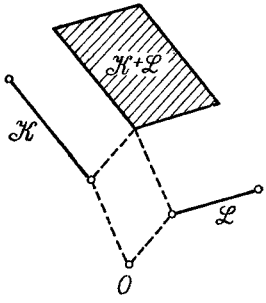

Рис. 9.

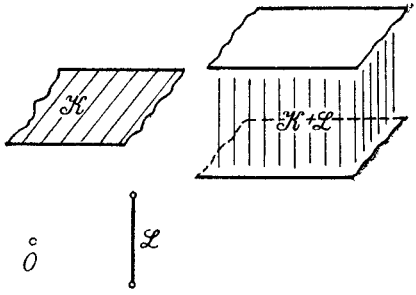

Рис. 10.

Рассмотрим уравнение первой степени с двумя неизвестными x и y:

$$ax + by + c = 0. \qquad (1)$$

Истолковывая x и y как координаты точки на плоскости, естественно поставить вопрос: какое

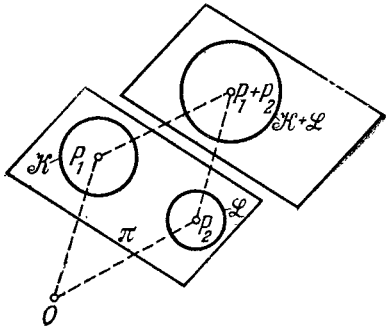

Рис. 11.

множество на плоскости образуют точки, координаты которых удовлетворяют уравнению (1), или, выражаясь короче, какое множество точек определяет уравнение (1)?

Мы дадим ответ, хотя, вероятно, он известен читателю: *множество точек, определяемых уравнением* (1), *есть прямая линия на плоскости.* Действительно, если $b \neq 0$, то уравнение (1) приводится к виду

$$y = kx + p,$$

а это уравнение, как известно, определяет прямую. Если же $b = 0$, то уравнение приводится к виду

$$x = h$$

и определяет прямую, параллельную оси ординат.

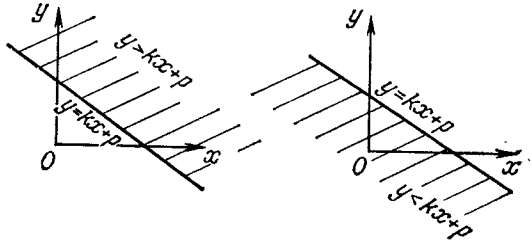

Рис. 12.

Аналогичный вопрос возникает и в отношении неравенства

$$ax + by + c \geqslant 0. \qquad (2)$$

Какое множество точек на плоскости определяет неравенство (2)?

И здесь ответ очень прост. Если $b \neq 0$, то данное неравенство приводится к одному из видов

$$y \geqslant kx + p \text{ или } y \leqslant kx + p.$$

Нетрудно понять, что первому из этих неравенств удовлетворяют все точки, лежащие «выше» прямой $y = kx + p$ или же на этой прямой, а второму — все точки, лежащие «ниже» прямой $y = kx + p$ или на этой прямой (рис. 12). Если же $b = 0$, то неравенство приводится к одному из видов

$$x \geqslant h \quad \text{или} \quad x \leqslant h;$$

первому из них удовлетворяют все точки, лежащие «правее» прямой $x = h$ или на этой прямой,

второму — все точки, лежащие «левее» прямой $x = h$ или на этой прямой (рис. 13).

Итак, *уравнение* (1) *определяет на координатной плоскости прямую линию, а неравенство* (2) *— одну из двух полуплоскостей, на которые эта прямая разбивает всю плоскость* (саму прямую мы считаем принадлежащей любой из двух определяемых ею полуплоскостей).

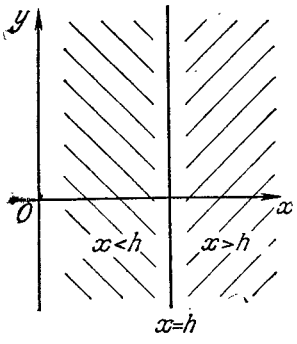

Рис. 13.

Мы хотим теперь решить аналогичные вопросы в отношении уравнения

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (3)$$

и неравенства

$$ax + by + cz + d \geqslant 0; \quad (4)$$

разумеется, при этом x, y, z истолковываются как координаты точки *в пространстве*. Результат, как нетрудно предвидеть, получится следующий.

Теорема. *Уравнение* (3) *определяет в пространстве некоторую плоскость, а неравенство* (4) *— одно из двух полупространств, на которые эта плоскость разбивает все пространство* (сама плоскость считается принадлежащей любому из двух определяемых ею полупространств).

Доказательство. Из трех чисел a, b, c хотя бы одно отлично от нуля; пусть, например, $c \neq 0$. Тогда уравнение (3) приводится к виду

$$z = kx + ly + p. \quad (5)$$

Обозначим через $\mathscr{L}$ множество всех точек $M(x, y, z)$, удовлетворяющих (5). Наша цель — показать, что $\mathscr{L}$ есть плоскость.

Выясним, какие точки из $\mathscr{L}$ принадлежат координатной плоскости yOz. Для этого следует в (5) положить $x = 0$. Получим

$$z = ly + p. \quad (6)$$

Итак, пересечение $\mathscr{L}$ с плоскостью yOz есть прямая u, определяемая в этой плоскости уравнением (6) (рис. 14).

Аналогично найдем, что пересечение $\mathscr{L}$ с плоскостью xOz есть прямая v, определяемая в этой плоскости уравнением

$$z = kx + p. \tag{7}$$

Обе прямые u и v проходят через точку P (0, 0, p).

Обозначим через π плоскость, содержащую прямые u и v. Покажем, что π *принадлежит* множеству $\mathscr{L}$.

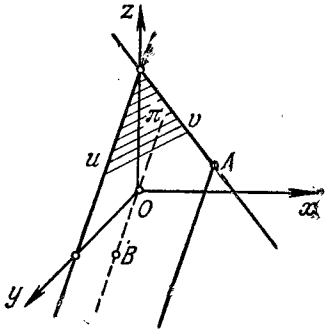

Рис. 14.

Для этой цели достаточно установить следующий факт: прямая, проходящая через любую точку $A \in v$ параллельно u, принадлежит $\mathscr{L}$.

Сначала найдем какую-нибудь точку B такую, что $OB \parallel u$. В плоскости yOz уравнение $z = ly + p$ определяет прямую u; значит, уравнение $z = ly$ определяет прямую, параллельную u и проходящую через начало координат (на рис. 14 она показана пунктиром). В качестве B можно взять точку с координатами $y = 1$, $z = l$, лежащую на этой прямой.

Произвольная точка $A \in v$ имеет координаты x, 0, $kx + p$. Выбранная нами точка B имеет координаты 0, 1, l. Прямая, проходящая через A параллельно u, состоит из точек

$$A + sB = (x, 0, kx + p) + s(0, 1, l) = \\ = (x, s, kx + p + sl),$$

где s — произвольное число (см. предложение 3) из раздела 1°). Легко проверить, что координаты точки $A + sB$ удовлетворяют уравнению (5), т. е. что $A + sB \in \mathscr{L}$. Этим доказано, что плоскость π целиком принадлежит множеству $\mathscr{L}$.

Остается сделать последний шаг — показать, что $\mathscr{L}$ *совпадает* с π, т. е. что никаких точек вне π множество $\mathscr{L}$ не содержит.

Для этого рассмотрим три точки: точку $M(x_0, y_0, z_0)$, лежащую в плоскости π, точку $M'(x_0, y_0, z_0+\varepsilon)$, лежащую «над» плоскостью π $(\varepsilon > 0)$, и точку $M''(x_0, y_0, z_0-\varepsilon)$, лежащую «под» π (рис. 15). Так как $M \in \pi$, то $z_0 = kx_0 + ly_0 + p$ и, следовательно,

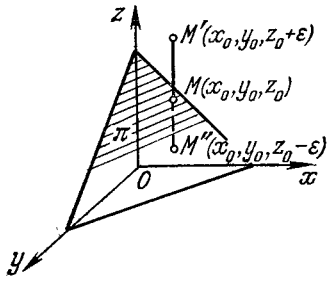

Рис. 15.

$$z_0 + \varepsilon > kx_0 + ly_0 + p,$$

$$z_0 - \varepsilon < kx_0 + ly_0 + p.$$

Отсюда видно, что координаты точки M' удовлетворяют строгому неравенству

$$z > kx + ly + p,$$

а координаты точки M'' — строгому неравенству

$$z < kx + ly + p.$$

Тем самым M' и M'' не принадлежат $\mathscr{L}$. Это доказывает, что $\mathscr{L}$ совпадает с плоскостью π. Кроме того, из наших рассуждений следует, что множество всех точек, удовлетворяющих неравенству

$$ax + by + cz + d \geqslant 0,$$

есть одно из двух полупространств («верхнее» или «нижнее»), на которые плоскость π разбивает все пространство.

§ 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ДВУМЯ ИЛИ ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Пусть дана система неравенств

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 \geqslant 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 \geqslant 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_mx + b_my + c_m \geqslant 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

с двумя неизвестными x и y.

Первое неравенство системы определяет на координатной плоскости xOy некоторую полуплоскость Π_1,

второе — полуплоскость Π_2 и т. д. Если какая-либо пара чисел x, y удовлетворяет всем неравенствам (1), то соответствующая точка $M(x, y)$ принадлежит всем полуплоскостям Π_1, Π_2, ..., Π_m одновременно. Другими словами, точка M принадлежит *пересечению* (общей части) указанных полуплоскостей. Легко видеть, что пересечение конечного числа полуплоскостей есть некоторая многоугольная область $\mathcal{K}$. На рис. 16 показана одна из возможных областей $\mathcal{K}$. Вдоль контура области изображены штрихи, идущие внутрь области. Они одновременно указывают, с какой стороны от данной прямой лежит соответствующая полуплоскость; то же самое указано и с помощью стрелок.

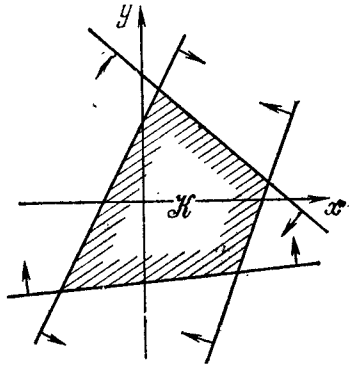

Рис. 16.

Область $\mathcal{K}$ называется областью решений системы (1). Сразу же отметим, что область решений не всегда бывает ограничена; в результате пересечения нескольких полуплоскостей может возникнуть и неограниченная область, как, например, область на рис. 17. Имея в виду то обстоятельство, что граница области $\mathcal{K}$ состоит из кусков прямых (или из целых прямых), мы говорим, что $\mathcal{K}$ есть многоугольная область (заметим, что в случае, когда область $\mathcal{K}$ ограничена, ее называют просто многоугольником*) решений системы (1)). Разумеется, возможен и такой случай, когда нет ни одной точки, принадлежащей одновременно всем рассматриваемым полуплоскостям, т. е. когда область $\mathcal{K}$

*) Здесь мы должны во избежание недоразумений сделать одну оговорку. В школьном курсе геометрии под «многоугольником» понимается замкнутая *линия*, состоящая из отрезков прямых. Между тем в литературе по линейным неравенствам этот термин обозначает не саму линию, а *множество всех точек плоскости, охваченных ею* (т. е. лежащих внутри или на самой линии). В дальнейшем термин «многоугольник» мы будем понимать именно в этом последнем смысле.

«пуста»; это означает, что система (1) противоречива. Такой случай изображен на рис. 18.

Область решений $\mathcal{K}$ всегда выпукла. Напомним, что, согласно общему определению, *множество точек*

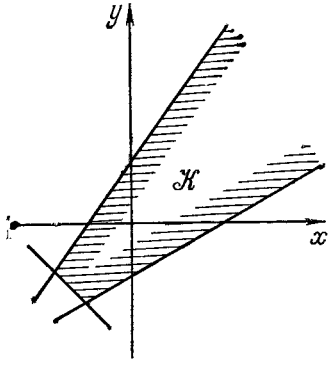

Рис. 17.

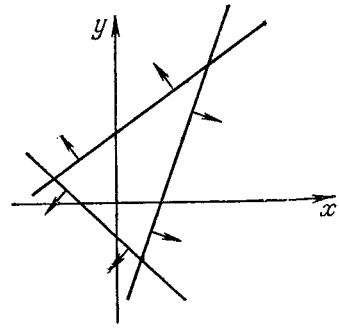

Рис. 18.

(*на плоскости или в пространстве*) *называется выпуклым, если вместе с любыми двумя своими точками A и B оно содержит и весь отрезок AB.* Рис. 19 иллюстрирует различие между выпуклым и невыпуклым множествами. Выпуклость области решений $\mathcal{K}$

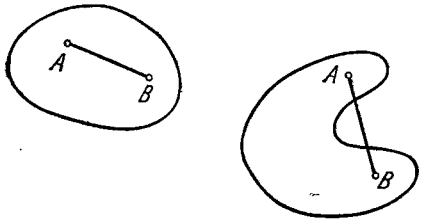

Рис. 19.

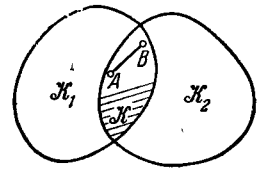

Рис. 20.

вытекает из самого способа образования области; ведь последняя получена путем пересечения нескольких полуплоскостей, а каждая полуплоскость есть выпуклое множество.

Впрочем, чтобы не оставалось никаких неясностей в отношении выпуклости $\mathcal{K}$, докажем следующую лемму.

Лемма. *Пересечение любого числа выпуклых множеств есть выпуклое множество.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ — два выпуклых множества и $\mathcal{K}$ — их пересечение. Рассмотрим любые две точки A и B, принадлежащие $\mathcal{K}$ (рис. 20). Так как $A \in \mathcal{K}_1$, $B \in \mathcal{K}_1$ и множество $\mathcal{K}_1$ выпукло, то отрезок AB принадлежит $\mathcal{K}_1$. Аналогичным образом отрезок AB принадлежит $\mathcal{K}_2$. Итак, отрезок AB принадлежит одновременно обоим множествам $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$, а следовательно, и их пересечению $\mathcal{K}$. Этим доказано, что $\mathcal{K}$ — выпуклое множество. Аналогичное рассуждение показывает, что пересечение любого числа (не обязательно двух) выпуклых множеств есть выпуклое множество.

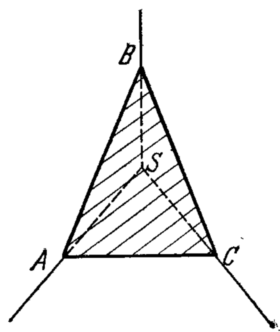

Рис. 21.

Итак, *геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют всем неравенствам* (1), *или область решений системы* (1), *есть выпуклая многоугольная область* $\mathcal{K}$. *Она получается в результате пересечения всех полуплоскостей, отвечающих неравенствам данной системы.*

Обратимся к случаю трех неизвестных. Теперь нам дана система

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \geqslant 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \geqslant 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_mx + b_my + c_mz + d_m \geqslant 0. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Каждое из написанных неравенств определяет, как мы знаем из § 1, некоторое полупространство. Поэтому область, определяемая данной системой, будет представлять собой пересечение (общую часть) m полупространств. Но пересечение конечного числа полупространств есть некоторая выпуклая многогранная область $\mathcal{K}$. На рис. 21 приведен пример такой области при $m = 4$. В этом примере область $\mathcal{K}$ есть обычный тетраэдр (точнее, $\mathcal{K}$ состоит из всех точек, лежащих внутри и на границе тетраэдра). И вообще

нетрудно понять, что любой выпуклый многогранник можно получить в результате пересечения конечного числа полупространств *). Конечно, возможен и такой случай, когда область $\mathcal{K}$ не ограничена (простирается в бесконечность); пример такой области изображен на рис. 22. Наконец, может оказаться, что вообще не существует точек, удовлетворяющих всем

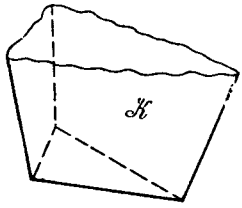

Рис. 22.

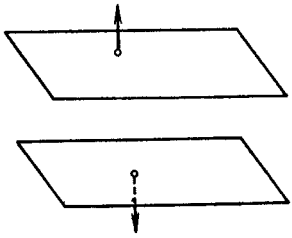

Рис. 23.

рассматриваемым неравенствам (система (2) противоречива); тогда область $\mathcal{K}$ пуста. Такой случай изображен на рис. 23.

Особо следует остановиться на случае, когда среди неравенств (2) имеются два таких:

$$ax + by + cz + d \geqslant 0,$$
$$-ax - by - cz - d \geqslant 0,$$

которые можно заменить одним *уравнением*

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Последнее определяет в пространстве некоторую плоскость π. Остальные неравенства (2) будут выделять из плоскости π некоторую выпуклую многоугольную область, которая и будет служить областью решений системы (2). Мы видим, что *частным случаем выпуклой многогранной области в пространстве может служить выпуклая многоугольная область на плоскости.*

*) Это место нуждается в пояснении того же рода, что и в сноске на стр. 15. Дело в том, что в школьном курсе геометрии под «многогранником» понимается замкнутая *поверхность*, составленная из плоских граней. Мы будем вкладывать в этот термин более широкий смысл, называя «многогранником» не саму поверхность, а *множество всех точек пространства, охваченных ею* (разумеется, это множество включает и самую поверхность, но только — как часть).

На рис. 24 область $\mathcal{K}$ представляет собой треугольник, образованный пересечением пяти полупространств: два из них ограничены «горизонтальной» плоскостью π, остальные три полупространства в пересечении образуют «вертикальную» трехгранную призму.

По аналогии со случаем двух неизвестных мы называем область $\mathcal{K}$ областью решений системы (2). Еще раз подчеркнем то обстоятельство, что область $\mathcal{K}$, будучи пересечением некоторого числа полупространств, обязательно выпукла.

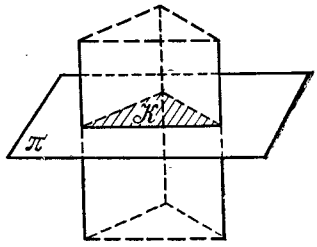

Рис. 24.

Итак, *система* (2) *определяет в пространстве выпуклую многогранную область* $\mathcal{K}$. *Последняя получается в результате пересечения всех полупространств, отвечающих неравенствам данной системы.*

Если область $\mathcal{K}$ ограничена, то ее называют просто многогранником решений системы (1).

§ 3. ВЫПУКЛАЯ ОБОЛОЧКА СИСТЕМЫ ТОЧЕК

Вообразим, что в плоскость, имеющую вид бесконечного листа фанеры, в точках $A_1, A_2, \ldots, A_p$ вбиты колышки. Изготовив петлю из резины и растянув ее как следует, охватим ею все колышки (пунктирная линия на рис. 25). Затем дадим петле стянуться, разумеется, насколько позволят забитые нами колышки. Множество точек, охваченных петлей после стягивания, изображено на рис. 25 штриховкой. Оно представляет собой, очевидно, некоторый выпуклый многоугольник. Последний называется выпуклой оболочкой системы точек $A_1, A_2, \ldots, A_p$.

Если точки $A_1, A_2, \ldots, A_p$ расположены не на плоскости, а в пространстве, то осуществить аналогичный эксперимент практически довольно трудно. Однако дадим волю воображению и представим себе, что точки $A_1, A_2, \ldots, A_p$ удалось заключить в мешок, сделанный из тугой резиновой пленки. Предоставленный самому себе, мешок будет стягиваться до тех пор,

пока этому не начнут мешать некоторые из данных точек. Наконец, наступит такой момент, когда дальнейшее стягивание будет уже невозможно (рис. 26). Довольно ясно, что к этому моменту мешок примет форму выпуклого многогранника с вершинами в некоторых из точек $A_1, A_2, \ldots, A_p$. Область пространства, охваченная этим многогранником, снова называется выпуклой оболочкой системы точек $A_1, A_2, \ldots, A_p$.

Данное выше определение выпуклой оболочки хотя и очень наглядно, но не вполне безупречно с точки

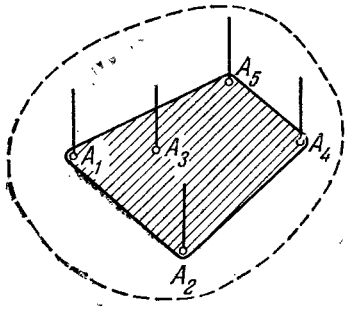

Рис. 25.

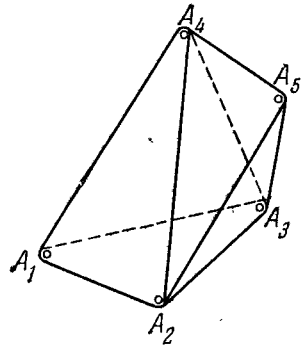

Рис. 26.

зрения «математической строгости». Определим теперь это понятие строго.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_p$ — произвольный набор точек (на плоскости или в пространстве). Рассмотрим всевозможные точки вида

$$s_1A_1 + s_2A_2 + \ldots + s_pA_p, \qquad (1)$$

где $s_1, s_2, \ldots, s_p$ — какие угодно неотрицательные числа, дающие в сумме единицу:

$$s_1, s_2, \ldots, s_p \geqslant 0 \quad \text{и} \quad s_1 + s_2 + \ldots + s_p = 1. \qquad (2)$$

Определение. *Множество точек вида* (1) *с условием* (2) *называется выпуклой оболочкой системы точек* $A_1, A_2, \ldots, A_p$ *и обозначается*

$$\langle A_1, A_2, \ldots, A_p \rangle.$$

Чтобы убедиться в том, что это определение не расходится с прежним, рассмотрим сначала случаи $p = 2$ и $p = 3$. Если $p = 2$, то нам даны две точки A_1 и A_2. Множество $\langle A_1, A_2\rangle$, как показывает предложение 1) § 1, есть отрезок A_1A_2.

Если $p = 3$, то нам даны три точки A_1, A_2 и A_3. Покажем, что множество $\langle A_1, A_2, A_3\rangle$ состоит из всех точек, лежащих внутри и на сторонах треугольника $A_1A_2A_3$.

И вообще докажем следующую лемму.

Лемма. *Множество* $\langle A_1, \ldots, A_{p-1}, A_p\rangle$ *состоит из всевозможных отрезков, соединяющих точку* A_p *с точками множества* $\langle A_1, \ldots, A_{p-1}\rangle$.

Доказательство. Для удобства дальнейших записей обозначим множество $\langle A_1, \ldots, A_{p-1}\rangle$ через $\mathcal{M}_{p-1}$, а множество $\langle A_1, \ldots, A_{p-1}, A_p\rangle$ через $\mathcal{M}_p$.

Рассмотрим любую точку $A \in \mathcal{M}_p$. Она имеет вид

$$A = s_1A_1 + \ldots + s_{p-1}A_{p-1} + s_pA_p,$$

где

$$s_1, \ldots, s_p \geqslant 0, \qquad s_1 + \ldots + s_p = 1.$$

Если $s_p = 0$, то $A \in \mathcal{M}_{p-1}$; таким образом, множество $\mathcal{M}_{p-1}$ является частью $\mathcal{M}_p$. Если $s_p = 1$, то $A = A_p$; таким образом, точка A_p принадлежит $\mathcal{M}_p$. Итак, $\mathcal{M}_p$ содержит $\mathcal{M}_{p-1}$ и точку A_p. Покажем теперь, что *любой отрезок* $A'A_p$, *где* $A' \in \mathcal{M}_{p-1}$, *целиком принадлежит* $\mathcal{M}_p$.

Если A — точка такого отрезка, то

$$A = tA' + sA_p \qquad (t, s \geqslant 0,\ t + s = 1).$$

С другой стороны, по определению точки A' имеем

$$A' = t_1A_1 + \ldots + t_{p-1}A_{p-1}$$
$$(t_1, \ldots, t_{p-1} \geqslant 0, \quad t_1 + \ldots + t_{p-1} = 1);$$

следовательно,

$$A = tt_1A_1 + \ldots + tt_{p-1}A_{p-1} + sA_p.$$

Полагая $tt_1 = s_1, \ldots, tt_{p-1} = s_{p-1}$, $s = s_p$, получим (1), (2). Этим доказано, что $A \in \mathcal{M}_p$. Итак, любой из указанных выше отрезков целиком принадлежит $\mathcal{M}_p$,

Нам остается теперь проверить, что ничего сверх таких отрезков множество $\mathcal{M}_p$ не содержит, т. е. что *любая точка A из $\mathcal{M}_p$ принадлежит одному из рассматриваемых отрезков.*

Пусть $A \in \mathcal{M}_p$. Тогда имеем (1), (2). Можно считать $s_p \neq 1$, иначе $A = A_p$, и доказывать нечего. Но если $s_p \neq 1$, то $s_1 + \ldots + s_{p-1} = 1 - s_p > 0$, поэтому можем записать

$$A = (s_1 + \ldots + s_{p-1})\left[\frac{s_1}{s_1 + \ldots + s_{p-1}} A_1 + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{s_{p-1}}{s_1 + \ldots + s_{p-1}} A_{p-1}\right] + s_p A_p.$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, определяет некоторую точку A', принадлежащую $\mathcal{M}_{p-1}$, ибо коэффициенты при $A_1, \ldots, A_{p-1}$ в этом выражении неотрицательны и в сумме дают 1. Итак,

$$A = (s_1 + \ldots + s_{p-1})\, A' + s_p A_p.$$

Поскольку коэффициенты при A' и A_p также неотрицательны и в сумме дают 1, точка A лежит на отрезке $A'A_p$. Этим доказательство леммы завершается.

Теперь нетрудно понять, что данное в начале этого параграфа наглядное определение выпуклой оболочки и последующее строгое определение эквивалентны. Действительно, какое бы из двух определений выпуклой оболочки мы ни взяли за основу, в обоих случаях переход от выпуклой оболочки системы $A_1, \ldots, A_{p-1}$ к выпуклой оболочке системы $A_1, \ldots, A_{p-1}, A_p$ происходит по одному и тому же правилу: точку A_p нужно соединить отрезками со всеми точками выпуклой оболочки для $A_1, \ldots, A_{p-1}$ (при наглядном определении выпуклой оболочки это правило непосредственно очевидно, при строгом определении оно составляет содержание леммы). Если теперь учесть, что при $p = 2$ мы получаем согласно обоим определениям одно и то же множество — отрезок A_1A_2, — то эквивалентность обоих определений станет очевидной.

Впрочем, термин «выпуклая оболочка» еще не вполне нами оправдан, ибо мы еще не показали, что *множество $\langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle$ всегда выпукло.* Сделаем это сейчас.

Пусть A и B — две произвольные точки этого множества:

$$A = s_1A_1 + s_2A_2 + \ldots + s_pA_p,$$
$$B = t_1A_1 + t_2A_2 + \ldots + t_pA_p,$$

где

$$s_1, \ldots, s_p, t_1, \ldots, t_p \geqslant 0,$$
$$s_1 + \ldots + s_p = t_1 + \ldots + t_p = 1. \qquad (3)$$

Любая точка C отрезка AB имеет вид

$$C = sA + tB,$$

где

$$s, t \geqslant 0, \quad s + t = 1, \qquad (4)$$

откуда следует

$$C = s(s_1A_1 + \ldots + s_pA_p) + t(t_1A_1 + \ldots + t_pA_p) = (ss_1 + tt_1)A_1 + \ldots + (ss_p + tt_p)A_p.$$

Числа, стоящие коэффициентами при $A_1, \ldots, A_p$, неотрицательны и в сумме дают 1 (как следует из (3), (4)). Это означает, что точка C принадлежит множеству $\langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle$, т. е. что это множество является выпуклым.

Вместе с тем легко видеть, что $\langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle$ — это *наименьшее из всех выпуклых множеств, содержащих исходные точки* $A_1, A_2, \ldots, A_p$, т. е. что оно содержится в любом из таких множеств. Это утверждение непосредственно следует из доказанной выше леммы и из определения выпуклого множества.

Указанный выше факт объясняет название «выпуклая оболочка». Одновременно он дает еще одно объяснение тому, что множество $\langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle$ может быть получено с помощью приема, описанного в начале этого параграфа. Ведь множество, охваченное резиновой петлей (или пленкой) после того, как последняя стянется до предела вокруг системы точек $A_1, A_2, \ldots, A_p$, — это и есть как раз наименьшее выпуклое множество, содержащее указанные точки.

§ 4. ВЫПУКЛЫЙ МНОГОГРАННЫЙ КОНУС

Начнем с определения.

Выпуклым многогранным конусом называется пересечение конечного числа полупространств, граничные плоскости которых проходят через

общую точку; последняя называется ***вершиной конуса.***

Прежде всего укажем, в каком отношении понятие выпуклого многогранного конуса находится к системам линейных неравенств. Ограничимся частным случаем, а именно, когда вершина конуса есть начало координат. Это означает, что все граничные плоскости проходят через начало координат. Но уравнение плоскости, проходящей через начало координат, имеет вид

$$ax + by + cz = 0$$

(свободный член уравнения должен равняться нулю, в противном случае (0, 0, 0) не будет решением). Таким образом, *выпуклый многогранный конус с вершиной в начале координат — это область решений некоторой системы однородных неравенств*:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z \geqslant 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z \geqslant 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_mx + b_my + c_mz \geqslant 0. \end{array}\right\}$$

Разумеется, верно и обратное: область решений однородной системы неравенств всегда представляет собой некоторый выпуклый многогранный конус с вершиной в начале координат.

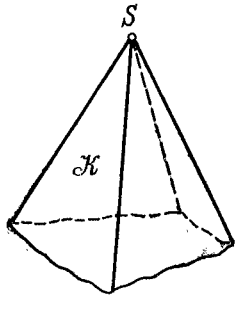

Рис. 27.

Примером выпуклого многогранного конуса может служить выпуклая область в пространстве, границей которой служит некоторый многогранный угол с вершиной S — нечто вроде бесконечной выпуклой пирамиды, не имеющей основания и неограниченно простирающейся в направлении от вершины (на рис. 27 изображена одна из таких пирамид, имеющая четыре грани). Но возможны и менее интересные случаи, например:

1. Полупространство (рис. 28, *а*). У такого «конуса» роль вершины может играть любая точка $S \in$

$\in \pi$, где π — граничная плоскость данного полупространства.

2. Пересечение двух полупространств, граничные плоскости которых пересекаются по некоторой прямой l (рис. 28, *б*). Роль вершины может играть любая точка $S \in l$.

3. Плоскость. Ясно, что любую плоскость π в пространстве можно рассматривать как пересечение двух

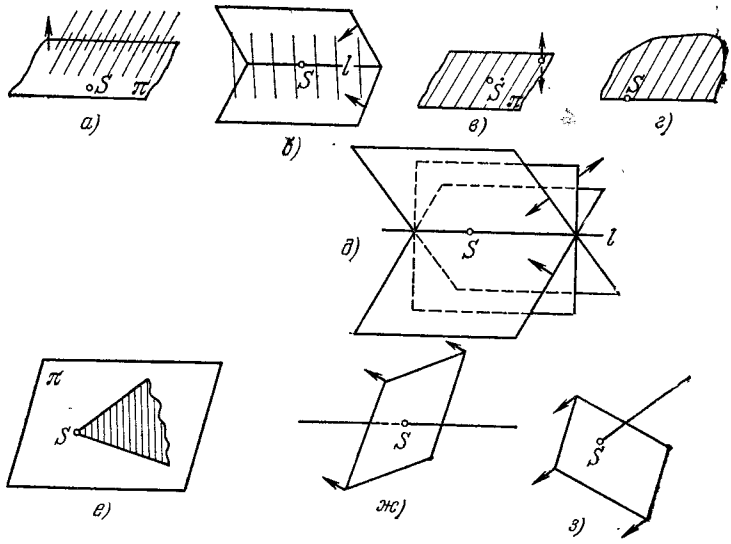

Рис. 28.

полупространств, расположенных по разные стороны от π (рис. 28, *в*). Роль вершины в этом случае может играть любая точка $S \in \pi$.

4. Полуплоскость (рис. 28, *г*). Вершина S — любая точка граничной прямой.

5. Прямая. Каждую прямую l в пространстве можно получить пересечением трех полупространств, граничные плоскости которых проходят через l (рис. 28, *д*). Вершина S — любая точка прямой l.

6. Угол (меньший 180°) в произвольной плоскости π (рис. 28, *е*). Угол можно получить, пересекая плоскость π с двумя полупространствами (как именно?).

7. Луч (рис. 28, *ж*). Луч может рассматриваться как пересечение прямой и полупространства. Вершина S — начало луча.

8. Точка. Такой «конус» можно получить, взяв общую часть луча и соответствующего полупространства (рис. 28, *з*).

Конечно, перечисленные нами примеры 1—8 расходятся (одни в меньшей степени, другие в большей) с обычным употреблением слова «конус», но мы вынуждены с этим мириться, если хотим сохранить данное в начале этого параграфа общее определение выпуклого многогранного конуса.

Постараемся теперь в нескольких словах показать, что *указанными выше множествами исчерпываются все многогранные выпуклые конусы в пространстве.*

Пусть p обозначает число полупространств, пересечением которых является рассматриваемый конус $\mathcal{K}$. Если $p = 1$, то наше утверждение справедливо, ибо тогда $\mathcal{K}$ есть полупространство. Простое рассуждение, которое мы предоставим провести читателю, показывает, что если наше утверждение верно для конуса, полученного в результате пересечения p полупространств, то оно верно также и для конуса, образованного пересечением $p + 1$ полупространств. Отсюда по принципу полной математической индукции следует, что наше утверждение справедливо для любого p.

Выпуклые многогранные конусы обладают многими интересными свойствами. Рамки настоящей книги не позволяют нам углубляться в эту тематику — ограничимся лишь несколькими, наиболее простыми предложениями.

Введем еще одно определение, или, если угодно, обозначение.

Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_q$ — произвольный набор из конечного числа точек (в пространстве). *Символом* $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$ *мы будем обозначать множество точек вида*

$$t_1B_1 + t_2B_2 + \ldots + t_qB_q,$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_q$ — *произвольные неотрицательные числа.*

Что представляет собой геометрически множество $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$? Из определения ясно, что оно яв-

ляется суммой множеств (B_1), (B_2), ..., (B_q); поэтому сначала мы должны выяснить, что представляет собой множество (B), т. е. множество точек вида tB, где t — любое неотрицательное число, а B — фиксированная точка. Но ответ на последний вопрос очевиден: если B есть начало координат, то и множество (B) совпадает с началом; в противном случае (B) есть луч, выходящий из начала координат и проходящий через точку B. Теперь заметим, что сумма любого множества с началом координат есть снова

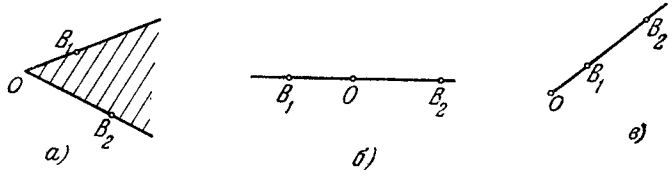

Рис. 29.

это же множество; отсюда ясно, что, изучая множества $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$, мы ничего не потеряем, если *будем считать все точки* $B_1, B_2, \ldots, B_q$ *отличными от начала координат. Тогда множество* $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$ *будет представлять собой сумму лучей* $(B_1), (B_2), \ldots, (B_q)$.

Последнее замечание делает почти очевидной следующую лемму.

Лемма. *Множество* $(B_1, \ldots, B_{q-1}, B_q)$ *есть объединение отрезков, соединяющих каждую точку множества* $(B_1, \ldots, B_{q-1})$ *с каждой точкой луча* (B_q).

Строгое доказательство леммы проводится по тому же плану, что и доказательство аналогичной леммы из § 3; рекомендуем читателю провести его самостоятельно.

Исходя из леммы, легко вывести, что (B_1, B_2) есть угол, прямая или луч (рис. 29, *а*, *б*, *в*). Затем легко установить, что (B_1, B_2, B_3) есть одно из множеств: бесконечная трехгранная пирамида, плоскость, полуплоскость, угол, прямая, луч. Теперь становится ясным, что между множествами $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$ и выпуклыми многогранными конусами должна существовать тесная связь. И такая связь действительно

имеется. Для большей отчетливости сформулируем соответствующие предложения в виде двух теорем.

Теорема 1. *Множество* $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$ *или совпадает со всем пространством, или же представляет собой некоторый выпуклый многогранный конус с вершиной в начале координат.*

Что множество $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$ действительно может совпадать со всем пространством, показывает такой пример. Рассмотрим четыре точки B_1, B_2, B_3, B_4, расположенные так, что лучи (B_1), (B_2), (B_3), (B_4) образуют попарно тупые углы (рис. 30). Каждое из множеств (B_1, B_2, B_3), (B_1, B_2, B_4), (B_1, B_3, B_4), (B_2, B_3, B_4) представляет собой бесконечную трехгранную пирамиду с вершиной в начале координат. Множество (B_1, B_2, B_3, B_4), очевидно, содержит каждую из этих пирамид. Но объединение указанных пирамид совпадает со всем пространством!

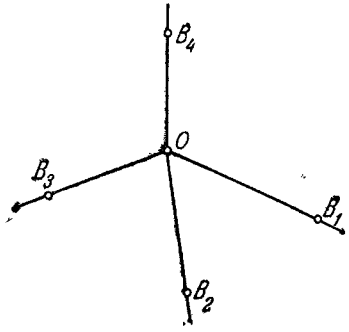

Рис. 30.

Теорема 2. *Любой выпуклый многогранный конус с вершиной в начале координат есть множество вида* $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$.

Доказательство теоремы 1 мы проведем лишь в общих чертах. Воспользуемся методом полной математической индукции. Утверждение теоремы при $q = 1$ очевидно. Предположим теперь, что теорема справедлива для множеств вида $(B_1, \ldots, B_q)$, и, опираясь на этот факт, докажем ее справедливость для множеств $(B_1, \ldots, B_q, B_{q+1})$.

По предположению индукции $(B_1, \ldots, B_q)$ есть либо все пространство, либо некоторый выпуклый многогранный конус в нем. В первом случае доказывать, в сущности, нечего, ибо тогда $(B_1, \ldots, B_q, B_{q+1})$ есть тоже все пространство. Пусть имеет место второй случай: $(B_1, \ldots, B_q)$ есть выпуклый многогранный конус $\mathcal{K}$. По лемме множество $(B_1, \ldots, B_q, B_{q+1})$ есть объединение отрезков, соединяющих каждую точку множества $\mathcal{K}$ с каждой точкой луча (B_{q+1}). Но, как

было показано ранее, любой выпуклый многогранный конус $\mathcal{K}$ есть либо бесконечная выпуклая пирамида, либо одно из множеств 1—8. Рассмотрев для каждого из этих случаев указанное выше объединение отрезков, нетрудно убедиться (проделайте это самостоятельно!), что оно либо совпадает со всем пространством, либо снова является выпуклым многогранным конусом. Итак, теорема верна для множеств вида (B_1), а также верна для $(B_1, \ldots, B_q, B_{q+1})$, коль скоро мы предположим ее справедливой для $(B_1, \ldots, B_q)$. Отсюда следует, что теорема верна при любом q.

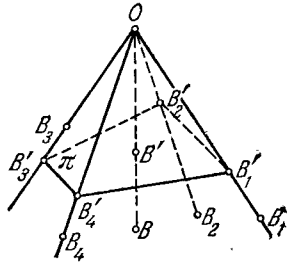

Рис. 31.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\mathcal{K}$ — выпуклый многогранный конус с вершиной в начале координат O. Как мы уже говорили, $\mathcal{K}$ есть либо бесконечная выпуклая пирамида, либо одно из множеств 1—8.

Пусть $\mathcal{K}$ — пирамида. Выберем на каждом из ее ребер по одной точке; получим систему точек $B_1, B_2, \ldots, B_q$. Мы утверждаем, что *множество* $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$ *и есть как раз* $\mathcal{K}$.

Для доказательства рассмотрим какую-либо плоскость π, пересекающую все ребра пирамиды $\mathcal{K}$. Получим точки $B'_1, B'_2, \ldots, B'_q$ (рис. 31). Очевидно,

$$B'_1 = k_1 B_1, \quad B'_2 = k_2 B_2, \ldots, \quad B'_q = k_q B_q, \qquad (1)$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_q$ — некоторые неотрицательные числа.

Пусть теперь B — какая-либо точка пирамиды, отличная от вершины O. Луч OB пересекается с плоскостью π в некоторой точке B'. Очевидно, B' принадлежит выпуклой оболочке системы $B'_1, B'_2, \ldots, B'_q$, и поэтому

$$B' = s_1 B'_1 + s_2 B'_2 + \ldots + s_q B'_q,$$

где $s_1, s_2, \ldots, s_q$ — неотрицательные числа, в сумме дающие 1. Если теперь учесть (1), то получим

$$B' = s_1 k_1 B_1 + s_2 k_2 B_2 + \ldots + s_q k_q B_q,$$

а если еще учесть, что $B' = kB$ $(k > 0)$, то найдем, что

$$B = t_1 B_1 + t_2 B_2 + \ldots + t_q B_q,$$

где

$$t_i = \frac{s_i k_i}{k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q).$$

Итак, мы показали, что любая точка B пирамиды $\mathscr{K}$ принадлежит множеству $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$. Обратное (т. е. что любая точка множества $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$ принадлежит $\mathscr{K}$) очевидно. Итак, $\mathscr{K}$ совпадает с $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$.

Случай, когда $\mathscr{K}$ есть одно из исключительных множеств 1—8, разбирается без особого труда; предоставляем его читателю.

§ 5. ОБЛАСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Наша задача теперь — дать эффективное описание всех решений системы линейных неравенств. В настоящем параграфе эта задача решается для систем с двумя неизвестными x и y. Несмотря на то, что число неизвестных невелико (всего два), мы постараемся провести анализ таких систем с общих позиций, т. е. так, чтобы полученные при этом результаты можно было легко перенести на системы с бо́льшим числом неизвестных.

В конечном счете решение любой системы линейных неравенств сводится к решению *ряда систем линейных уравнений*. Мы будем рассматривать решение системы линейных уравнений как нечто простое, как элементарное действие, и не будем смущаться, если для реализации предлагаемого метода придется совершать такое действие много раз.

1°. *Необходимые леммы.* Пусть дана система неравенств

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 &\geqslant 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 &\geqslant 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_m x + b_m y + c_m &\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Оказывается целесообразным наряду с ней рассмотреть соответствующую систему *однородных неравенств*

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y &\geqslant 0,\\ a_2x + b_2y &\geqslant 0,\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_mx + b_my &\geqslant 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

а также соответствующую систему *однородных уравнений*

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y &= 0,\\ a_2x + b_2y &= 0,\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_mx + b_my &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Область решений системы (1) на координатной плоскости xOy обозначим через $\mathscr{K}$, системы (2) — через $\mathscr{K}_0$, системы (3) — через $\mathscr{L}$. Очевидно, $\mathscr{L} \subset \mathscr{K}_0$, где символ $\subset$ заменяет слова «содержится в» *).

Лемма 1. *Имеет место включение*

$$\mathscr{K} + \mathscr{K}_0 \subset \mathscr{K},$$

т. е. сумма любого решения данной системы неравенств с любым решением соответствующей однородной системы неравенств является снова решением данной системы.

Доказательство. Пусть A — произвольная точка из $\mathscr{K}$, B — произвольная точка из $\mathscr{K}_0$. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned} a_1x_A + b_1y_A + c_1 &\geqslant 0,\\ a_2x_A + b_2y_A + c_2 &\geqslant 0,\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_mx_A + b_my_A + c_m &\geqslant 0 \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} a_1x_B + b_1y_B &\geqslant 0,\\ a_2x_B + b_2y_B &\geqslant 0,\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_mx_B + b_my_B &\geqslant 0. \end{aligned}$$

*) Не следует смешивать символ $\subset$ с введенным ранее $\in$ — последний употребляется в том случае, когда речь идет о *принадлежности какой-либо точки какому-либо множеству.* Если же хотят записать тот факт, что *одно множество является частью другого,* то употребляют символ $\subset$.

Складывая каждое неравенство, написанное слева, с соответствующим неравенством, написанным справа, получим

$$\begin{aligned} a_1(x_A + x_B) + b_1(y_A + y_B) + c_1 &\geqslant 0, \\ a_2(x_A + x_B) + b_2(y_A + y_B) + c_2 &\geqslant 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_m(x_A + x_B) + b_m(y_A + y_B) + c_m &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Эти неравенства означают, что пара чисел $x_A + x_B$, $y_A + y_B$ — координат точки $A + B$ — является решением исходной системы (1), т. е. что $A + B \in \mathcal{K}$. Лемма доказана.

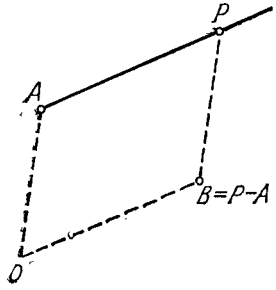

Рис. 32.

Л е м м а 2. 1) *Если некоторый луч с началом в точке A целиком принадлежит множеству* $\mathcal{K}$ *и* P *— произвольная точка этого луча, то* $P - A \in \mathcal{K}_0$.

2) *Если некоторая прямая целиком принадлежит множеству* $\mathcal{K}$ *и* A, P *— две произвольные точки этой прямой, то* $P - A \in \mathcal{L}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о 1). Обозначим точку $P - A$ через B. Рассматриваемый нами луч состоит из точек следующего вида:

$$A + sB, \tag{4}$$

где s — произвольное неотрицательное число (рис. 32). Любая из этих точек является по условию решением системы (1), т. е.

$$\left.\begin{aligned} a_1(x_A + sx_B) + b_1(y_A + sy_B) + c_1 &\geqslant 0, \\ a_2(x_A + sx_B) + b_2(y_A + sy_B) + c_2 &\geqslant 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_m(x_A + sx_B) + b_m(y_A + sy_B) + c_m &\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Рассмотрим, например, первое из этих неравенств. Оно может быть записано в виде

$$(a_1x_A + b_1y_A + c_1) + s(a_1x_B + b_1y_B) \geqslant 0.$$

Поскольку это неравенство справедливо при *любом* $s \geqslant 0$, то коэффициент при s, как нетрудно видеть, должен быть неотрицательным числом:

$$a_1 x_B + b_1 y_B \geqslant 0.$$

Аналогично из рассмотрения остальных неравенств (5) можно получить

$$\begin{aligned} a_2 x_B + b_2 y_B &\geqslant 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ a_m x_B + b_m y_B &\geqslant 0, \end{aligned}$$

откуда видно, что точка B принадлежит множеству $\mathscr{K}_0$.

Доказательство 2) проводится аналогично. Рассматриваемая прямая состоит из точек вида (4), где s — произвольное число. Поэтому неравенства (5) справедливы при любом значении s. Отсюда вытекает, что в каждом из этих неравенств суммарный коэффициент при s должен равняться нулю, т. е.

$$\begin{aligned} a_1 x_B + b_1 y_B &= 0, \\ a_2 x_B + b_2 y_B &= 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ a_m x_B + b_m y_B &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $B \in \mathscr{L}$. Лемма доказана.

Легко видеть, что леммы 1 и 2 справедливы для систем с любым числом неизвестных.

2°. *Случай, когда система неравенств* (1) *нормальная.* Рассмотрим снова систему неравенств (1) и соответствующую ей систему однородных уравнений (3). Последняя имеет очевидное решение $x = 0$, $y = 0$. Это решение называется *нулевым.* Для исследования системы (1) оказывается важным знать, имеет ли система (3) также и ненулевые решения. В связи с этим введем такое

Определение. *Система линейных неравенств называется нормальной, если соответствующая система линейных однородных уравнений имеет только нулевое решение.*

Другими словами, система неравенств нормальна, если определенное выше множество $\mathscr{L}$ — область

решений соответствующей однородной системы уравнений — содержит только одну точку (начало координат).

Разумеется, понятие нормальной системы имеет смысл при любом числе неизвестных.

Нетрудно показать, что *совместная система неравенств нормальна тогда и только тогда, когда область ее решений $\mathcal{K}$ не содержит ни одной прямой.*

Действительно, если система нормальна, т. е. множество $\mathcal{L}$ содержит только начало координат, то область $\mathcal{K}$ не содержит прямых — это сразу же следует из второго утверждения леммы 2. Если система не является нормальной, то множество $\mathcal{L}$ содержит по крайней мере одну точку B, отличную от начала координат. Разумеется, все точки вида kB, где k — любое число, также принадлежат $\mathcal{L}$ *). Но в таком случае, какова бы ни была точка $P \in \mathcal{K}$ (а такая точка обязательно найдется, ибо система совместна и, следовательно, область $\mathcal{K}$ не пуста), множество всех точек вида $P + kB$ (где k — любое число) по лемме 1 принадлежит $\mathcal{K}$. Указанное множество, как мы знаем, есть прямая линия. Значит, в случае, когда система не нормальна, область $\mathcal{K}$ содержит прямую. Этим полностью доказано подчеркнутое выше предложение.

В этом разделе мы изучим область решений системы (1), предполагая, что эта система совместна (область $\mathcal{K}$ не пуста) и нормальна.

Прежде всего, из того факта, что область $\mathcal{K}$ не содержит прямых, вытекает, что она обязательно имеет в е р ш и н ы. В понятие вершины мы вкладываем следующий смысл (близкий к интуитивному пониманию слова «вершина»).

В е р ш и н о й области $\mathcal{K}$ называется такая точка области, которая не является внутренней точкой ни для одного отрезка, целиком лежащего в $\mathcal{K}$. Другими словами, вершина есть точка $A \in \mathcal{K}$, обладающая тем свойством, что любой отрезок, принадлежащий $\mathcal{K}$ и проходящий через A, должен иметь в этой точке начало или конец (рис. 33, *а* и *б*, где точка A — одна из вершин; на рис. 33, *б* область $\mathcal{K}$ есть отрезок).

---

*) Если числа x, y, z — координаты точки B — удовлетворяют однородной системе уравнений, то и числа kx, ky, kz — координаты точки kB — также удовлетворяют этой системе.

Поясним подробнее, почему интересующее нас выпуклое множество $\mathcal{K}$ имеет вершины. Если $\mathcal{K}$ лежит на прямой, то это либо отдельная точка, либо отрезок, либо луч, и существование вершин очевидно. Если же $\mathcal{K}$ не лежит на прямой, то рассмотрим границу этого множества. Она состоит из отрезков и лучей (полных прямых $\mathcal{K}$ не содержит). Очевидно, конец любого из таких отрезков и начало любого из лучей будут вершинами $\mathcal{K}$.

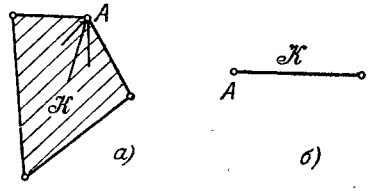

Рис. 33.

Нахождение вершин области $\mathcal{K}$ не представляет особого труда. Прежде всего заметим, что i-му неравенству системы (1) на координатной плоскости xOy отвечает полуплоскость, граничная прямая которой l_i определяется уравнением

$$a_i x + b_i y + c_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Очевидно, точка A из области $\mathcal{K}$ в том и только в том случае является вершиной, когда она принадлежит двум *различным* граничным прямым.

Условимся называть *правильной* любую подсистему из двух уравнений системы

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 &= 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_m x + b_m y + c_m &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

при условии, что эта подсистема имеет *единственное* решение (x, y).

Из данной выше характеристики вершины вытекает теперь следующий способ нахождения вершин области $\mathcal{K}$.

Чтобы найти все вершины, следует найти решения всех правильных подсистем системы (6) *и отобрать из них те, которые удовлетворяют исходной системе* (1).

Поскольку число правильных подсистем не превосходит C_m^2 — числа сочетаний из m по 2, — то и вершин области $\mathcal{K}$ не может быть больше. Итак, *число вершин конечно.*

Замечание. Из сказанного выше вытекает, что если область $\mathcal{K}$ решений нормальной системы не имеет ни одной вершины, то эта область пуста — система не имеет решений (несовместна).

Пример 1. Найти все вершины области $\mathcal{K}$, определяемой системой неравенств

$$\left.\begin{aligned} x+\ y+1 &\geqslant 0,\\ x-2y-2 &\geqslant 0,\\ 2x-\ y-4 &\geqslant 0. \end{aligned}\right\}$$

Решая подсистемы

$$\left.\begin{aligned} x+\ y+1&=0,\\ x-2y-2&=0, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x+y+1&=0,\\ 2x-y-4&=0, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x-2y-2&=0,\\ 2x-\ y-4&=0 \end{aligned}\right\}$$

(все они оказываются правильными), находим три точки:

$$(0, -1), \quad (1, -2), \quad (2, 0),$$

из которых только вторая и третья удовлетворяют всем заданным неравенствам. Значит, вершинами области $\mathcal{K}$ являются точки

$$A_1(1, -2) \quad \text{и} \quad A_2(2, 0).$$

Вернемся к системе (1). Пусть

$$A_1, A_2, \ldots, A_p$$

— все вершины области $\mathcal{K}$. Множество $\langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle$ — выпуклая оболочка системы точек $A_1, A_2, \ldots, A_p$ — также принадлежит $\mathcal{K}$ (ибо $\mathcal{K}$ — выпуклая область!). Но тогда по лемме 1 и множество

$$\langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle + \mathcal{K}_0$$

принадлежит $\mathcal{K}$. Покажем, что в действительности эта сумма совпадает с $\mathcal{K}$, т. е. что справедлива следующая

Теорема. *Если система неравенств нормальна, то*

$$\mathcal{K} = \langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle + \mathcal{K}_0, \tag{7}$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_p$ — все вершины области $\mathcal{K}$.

Доказательство. Пусть P — произвольная точка области $\mathcal{K}$, отличная от вершин области. Пря-

мая A_1P пересекает выпуклую область $\mathcal{K}$ либо по некоторому отрезку A_1A (рис. 34), либо по лучу с началом в A_1 (рис. 35). Во втором случае $P - A_1 \in \mathcal{K}_0$ (лемма 2), следовательно, $P \in A_1 + \mathcal{K}_0$. В первом же

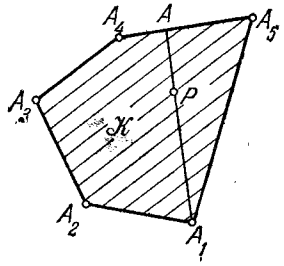

Рис. 34.

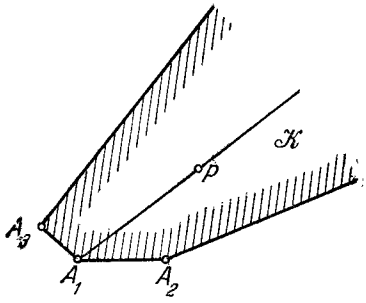

Рис. 35.

случае рассуждаем так: если точка A лежит на ограниченном ребре A_iA_j области $\mathcal{K}$ (как на рис. 34), то P принадлежит выпуклой оболочке точек A_1, A_i, A_j, если же точка A лежит на неограниченном ребре с началом в вершине A_i (рис. 36), то по лемме 1 имеем $A \in A_i + \mathcal{K}_0$, в силу чего $P \in \langle A_1, A_i \rangle + \mathcal{K}_0$. Таким образом, во всех случаях точка P оказывается принадлежащей множеству $\langle A_1, A_2, \ldots, A_p \rangle + \mathcal{K}_0$. Теорема доказана.

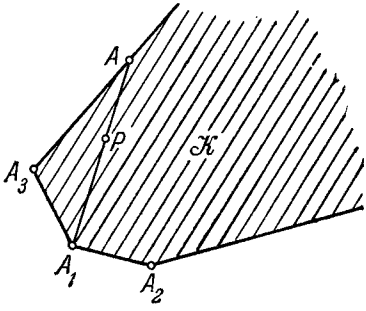

Рис. 36.

Поскольку способ отыскания вершин нам уже известен, то для полного описания области $\mathcal{K}$ не хватает только умения находить область $\mathcal{K}_0$. Последняя представляет собой область решений однородной нормальной системы (2). К ее описанию мы и переходим.

3°. *Однородная нормальная система неравенств* (2). Каждое из неравенств (2) определяет полуплоскость, граничная прямая которой проходит через начало координат. Общая часть этих полуплоскостей и есть $\mathcal{K}_0$.

В данном случае среди граничных прямых имеются по крайней мере две различные (система (2) нормальна!). Следовательно, $\mathcal{K}_0$ либо совпадает с началом координат ($x = 0$, $y = 0$), либо есть луч с вершиной в начале координат, либо представляет собой некоторый угол, меньший 180°, с вершиной в начале координат. Если мы будем знать две точки B_1 и B_2, лежащие на разных сторонах этого угла (рис. 37), то все точки угла запишутся в виде

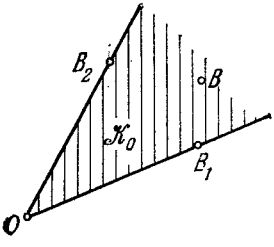

Рис. 37.

$$B = t_1 B_1 + t_2 B_2, \qquad (8)$$

где t_1 и t_2 — произвольные неотрицательные числа. Но отыскать точки B_1 и B_2 совсем нетрудно, если учесть, что каждая из них: а) принадлежит $\mathcal{K}_0$, т. е. удовлетворяет системе (2), и б) лежит на границе $\mathcal{K}_0$, т. е. удовлетворяет одному из уравнений (3). Если $\mathcal{K}_0$ есть луч, то вместо (8) имеем

$$B = tB_1, \qquad (9)$$

где B_1 — любая точка этого луча (отличная от начала), а t — произвольное неотрицательное число.

Пример 2. Найти область $\mathcal{K}_0$ решений системы

$$\left.\begin{aligned} x + y &\geqslant 0, \\ x - 2y &\geqslant 0, \\ 2x - y &\geqslant 0, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

а также область $\mathcal{K}$ решений системы примера 1.

Решение. Система (10) нормальна: единственное решение соответствующей однородной системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 0, \\ x - 2y &= 0, \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

есть (0, 0).

Выберем какую-либо точку, удовлетворяющую первому из уравнений (11) (но отличную от (0, 0)), например, точку $C(-1, 1)$. Простой проверкой убеждаемся, что точка C удовлетворяет не всем неравен-

ствам (10), следовательно, ни сама она, ни какая-либо точка луча OC (отличная от начала O) не принадлежат $\mathcal{K}_0$. Рассмотрев точку $-C$ (т. е. точку $(1, -1)$), находим, что она принадлежит $\mathcal{K}_0$. Итак, $B_1 = (1, -1)$. Второму уравнению удовлетворяет точка $(2, 1)$; она тоже является решением системы (10), так что $B_2 = (2, 1)$. Область $\mathcal{K}_0$ состоит из точек (рис. 38)

$$t_1B_1 + t_2B_2 = t_1(1, -1) + t_2(2, 1) = (t_1 + 2t_2, -t_1 + t_2),$$

где t_1 и t_2 — произвольные неотрицательные числа.

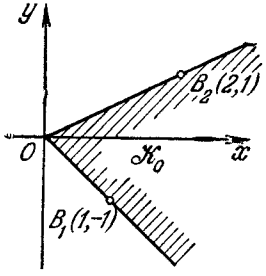

Рис. 38.

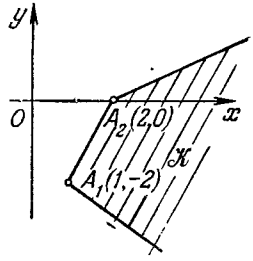

Рис. 39.

Обращаясь к системе неравенств примера 1, мы замечаем, что соответствующая ей однородная система неравенств есть как раз (10). По доказанной выше теореме имеем

$$\mathcal{K} = \langle A_1, A_2 \rangle + \mathcal{K}_0,$$

где $A_1(1, -2)$ и $A_2(2, 0)$ — вершины области $\mathcal{K}$. Итак, $\mathcal{K}$ состоит из точек (рис. 39)

$$s(1, -2) + (1 - s)(2, 0) + (t_1 + 2t_2, -t_1 + t_2) =$$
$$= (2 - s + t_1 + 2t_2, -2s - t_1 + t_2),$$

где s — любое число из промежутка $[0, 1]$, а t_1, t_2 — любые неотрицательные числа.

Пример 3. Найти область решений системы

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &\geqslant 0, \\ -4x + 2y &\geqslant 0, \\ x + y &\geqslant 0. \end{aligned}\right\}$$

Поступая, как в примере 2, находим только один луч:

$$B = t(1, 2) = (t, 2t) \qquad (t \geqslant 0)$$

(рис. 40).

Пример 4. Найти область решений системы

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &\geqslant 0, \\ x + y &\geqslant 0, \\ -3x + y &\geqslant 0. \end{aligned}\right\}$$

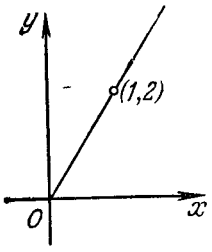

Рис. 40.

В данном случае ни одно из уравнений

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0, \\ x + y &= 0, \\ -3x + y &= 0 \end{aligned}$$

не имеет решений (кроме (0, 0)), которые удовлетворяли бы всем заданным неравенствам. Область $\mathcal{K}_0$ состоит из одной точки (0, 0) — начала координат.

4°. *Случай, когда система неравенств* (1) *не является нормальной.* Это означает, что область решений $\mathcal{L}$ однородной системы уравнений (3) содержит не только начало координат. Следовательно, все уравнения (3) определяют на плоскости одну и ту же прямую, и эта прямая есть $\mathcal{L}$.

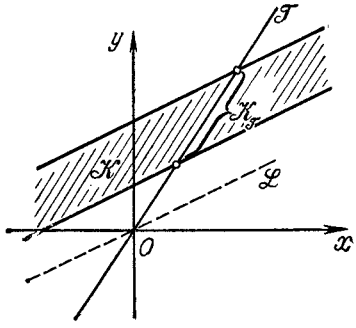

Рис. 41.

Согласно лемме 1 область $\mathcal{K}$ вместе с каждой своей точкой P содержит прямую $P + \mathcal{L}$ (прямую, проходящую через P параллельно $\mathcal{L}$). Рассмотрим какую-нибудь прямую $\mathcal{T}$, не параллельную $\mathcal{L}$. Если мы будем знать, какие точки прямой $\mathcal{T}$ принадлежат области $\mathcal{K}$, — множество этих точек обозначим $\mathcal{K}_\mathcal{T}$, — то сможем найти и саму область $\mathcal{K}$, ибо тогда $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\mathcal{T} + \mathcal{L}$ (рис. 41).

Уравнение прямой $\mathcal{L}$ есть $a_1x + b_1y = 0$. В этом уравнении один из коэффициентов a_1 или b_1 отличен

от нуля; пусть, например, $b_1 \neq 0$. Тогда в качестве прямой $\mathscr{T}$, не параллельной $\mathscr{L}$, можно взять ось y (ее уравнение есть $x = 0$). В этом случае множество $\mathscr{K}_{\mathscr{T}}$ — будем теперь обозначать его $\mathscr{K}_y$ — есть часть оси y, попавшая в $\mathscr{K}$. Чтобы найти это множество, следует положить в системе (1) $x = 0$. Тогда получим систему неравенств

$$\left.\begin{aligned} b_1 y + c_1 &\geqslant 0, \\ b_2 y + c_2 &\geqslant 0, \\ &\cdots\cdots \\ b_m y + c_m &\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

с одним неизвестным y, решить которую не составляет труда *). Заметим, что множество $\mathscr{K}_y$ может быть или пустым множеством (тогда и $\mathscr{K}$ пустое), или точкой, отрезком, лучом (но не всей осью y, ибо в противном случае $\mathscr{K}$ есть вся плоскость, что невозможно). Найдя это множество, мы будем знать и область $\mathscr{K}$, ибо

$$\mathscr{K} = \mathscr{K}_y + \mathscr{L} \tag{13}$$

(если $\mathscr{L}$ не параллельна оси y).

Пример 5. Найти область $\mathscr{K}$ решений системы

$$\left.\begin{aligned} x + y - 1 &\geqslant 0, \\ -x - y + 2 &\geqslant 0, \\ 2x + 2y + 3 &\geqslant 0. \end{aligned}\right\}$$

Легко видеть, что данная система не является нормальной и $\mathscr{L}$ есть прямая

$$x + y = 0$$

(не параллельная оси y). Полагая $x = 0$, получим систему

$$\left.\begin{aligned} y - 1 &\geqslant 0, \\ -y + 2 &\geqslant 0, \\ 2y + 3 &\geqslant 0, \end{aligned}\right\}$$

*) Заметим, что система (12) (рассматриваемая как система неравенств с одним неизвестным) будет уже нормальной. Действительно, в противном случае соответствующая ей однородная система имела бы некоторое ненулевое решение y^*; но тогда система (3) имела бы решение $(0, y^*)$, не принадлежащее $\mathscr{L}$.

из которой видно, что $\mathcal{K}_y$ — пересечение $\mathcal{K}$ с осью y — есть отрезок с концами $C_1(0, 1)$ и $C_2(0, 2)$. Значит, $\mathcal{K}$ есть множество точек вида (рис. 42)

$$(0, y) + (x, -x) = (x, y - x),$$

где x произвольно, а y — любое число в промежутке от 1 до 2.

В заключение кратко остановимся на одной теореме, которая вытекает из полученных выше результатов. В рассматриваемом нами сейчас двумерном случае (т. е. когда все происходит на плоскости) эта теорема не производит особого впечатления и правильнее всего было бы рассматривать ее как отправной пункт для обобщения на «n-мерный» случай. Последний изучается в § 7.

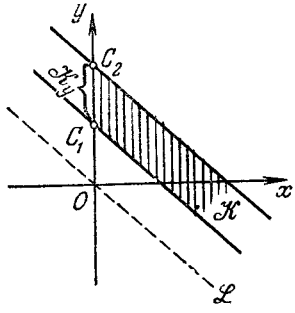

Рис. 42.

Теорема. *Любая (непустая) выпуклая многоугольная область $\mathcal{K}$ на плоскости может быть представлена в виде суммы*

$$\langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle + (B_1, B_2, \ldots, B_q). \tag{14}$$

Первое слагаемое этой суммы есть выпуклая оболочка некоторой системы точек $A_1, A_2, \ldots, A_p$, а второе — множество точек вида $t_1B_1 + t_2B_2 + \ldots + t_qB_q$, где $t_1, t_2, \ldots, t_q$ — произвольные неотрицательные числа.

Доказательство теоремы может быть проведено в несколько слов. Рассмотрим систему неравенств, задающую $\mathcal{K}$. Если эта система нормальна, то имеет место равенство (7); учитывая, что в этом равенстве $\mathcal{K}_0$ есть одно из множеств вида (B_1, B_2), (B_1) или (O) (начало координат), находим, что в случае нормальной системы наше утвержденне справедливо. Если система не является нормальной, то имеет место равенство (13), из которого также следует представимость $\mathcal{K}$ в нужном виде (почему?).

Заметим, что если все точки $A_1, A_2, \ldots, A_p$ совпадают с началом координат O, то и множество $\langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle$ совпадает с O; тогда от суммы (14) остается лишь второе слагаемое. В случае, когда точки $B_1, B_2, \ldots, B_q$ совпадают с O, множество $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$ также совпадает с O и от суммы (14) остается лишь первое слагаемое.

Обратная теорема также имеет место, хотя и с некоторой оговоркой.

Теорема. *Любое множество вида*

$$\langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle + (B_1, B_2, \ldots, B_q)$$

на плоскости есть либо вся плоскость, либо некоторая выпуклая многоугольная область в ней.

Доказательство довольно очевидно. Второе слагаемое, т. е. область $\mathcal{K}_0 = (B_1, B_2, \ldots, B_q)$, есть либо вся плоскость, либо полуплоскость, либо некоторый угол (меньший 180°), либо луч, либо точка (начало координат). Первое же слагаемое $\mathcal{K}_1 = (A_1, A_2, \ldots, A_p)$ представляет собой некоторый выпуклый

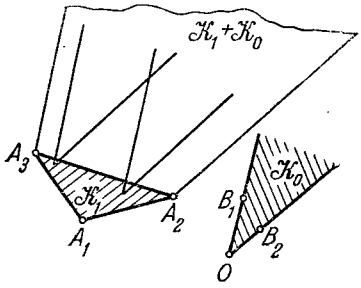

Рис. 43.

многоугольник. Множество $\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_0$ можно получить, подвергая $\mathcal{K}_0$ параллельным переносам на отрезки OK_1 (где K_1 — любая точка из $\mathcal{K}_1$) и беря объединение полученных множеств (рис. 43). Легко видеть, что при этом получится или вся плоскость (так будет, если $\mathcal{K}_0$ — вся плоскость), или некоторая выпуклая многоугольная область в ней.

§ 6. ОБЛАСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

После обстоятельного анализа, данного в предыдущем параграфе, мы можем теперь, при рассмотрении систем с тремя неизвестными, свести необходимую теорию к минимуму.

Наряду с исходной системой

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &\geqslant 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_mx + b_my + c_mz + d_m &\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

мы снова, как в § 5, рассматриваем две системы:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &\geqslant 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_mx + b_my + c_mz &\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

и

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_mx + b_my + c_mz &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Область решений системы (1) снова обозначаем через $\mathscr{K}$, системы (2) — через $\mathscr{K}_0$, системы (3) — через $\mathscr{L}$. Пользуясь введенной ранее терминологией, можно сказать, что $\mathscr{K}$ есть некоторая выпуклая многогранная область в пространстве, а $\mathscr{K}_0$ — выпуклый многогранный конус. Леммы 1 и 2 из § 5, как уже отмечалось, остаются в силе и здесь.

1°. *Случай, когда система неравенств* (1) *нормальна.* Тогда область $\mathscr{K}$ не содержит прямых и, следовательно, имеет хотя бы одну вершину. В самом деле, если $\mathscr{K}$ лежит в плоскости (а такой случай возможен, как отмечалось в § 2), то $\mathscr{K}$ — выпуклая многоугольная область на плоскости, не содержащая прямых, и поэтому, как объяснено в разделе 2° § 5, обязана иметь вершины. Если же область $\mathscr{K}$ не лежит в плоскости, то рассмотрим ее границу. Она состоит из плоских граней, каждая из которых — как выпуклая многоугольная область, не содержащая прямых, — должна иметь вершины. Но легко видеть, что вершина любой грани является одновременно и вершиной области $\mathscr{K}$.

В каждой вершине A области $\mathscr{K}$ сходятся по крайней мере три граничные плоскости, для которых точка A является *единственной* общей точкой. В самом деле, если бы это было не так, то все граничные плоскости, проходящие через A, или совпали бы, или имели бы общую прямую. Но тогда достаточно малый отрезок, проходящий через A и лежащий в общей граничной плоскости или на общей граничной прямой, принадлежал бы $\mathscr{K}$, что противоречит определению вершины.

Сказанное выше заставляет нас внести очевидные изменения в способ отыскания вершин, описанный в разделе 2° § 5. А именно, **правильной подсистемой** теперь следует называть подсистему не из двух, а *из трех* уравнений системы

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_mx + b_my + c_mz + d_m &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

при условии, что решение (x, y, z) этой подсистемы единственно. При таком понимании правильной под-

системы способ отыскания вершин остается в точности тем же, что и раньше, а именно:

Чтобы найти все вершины области $\mathcal{K}$, следует найти решения всех правильных подсистем системы (4) *и отобрать среди них те, которые удовлетворяют исходной системе* (1).

Сохраняет силу и теорема раздела 2° § 5; изменения, которые необходимо внести в доказательство этой теоремы, очевидны. Замечание о том, что нормальная система в случае отсутствия вершин у области $\mathcal{K}$ не имеет решений, также остается справедливым.

Пример 1. Найти вершины области $\mathcal{K}$, определенной с помощью системы неравенств

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+z-1&\geqslant 0,\\ x+2y+z-1&\geqslant 0,\\ x+y+2z-1&\geqslant 0,\\ x+y+z-1&\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

В данном случае соответствующая однородная система уравнений имеет вид

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+z&=0,\\ x+2y+z&=0,\\ x+y+2z&=0,\\ x+y+z&=0. \end{aligned}\right\}$$

Решая ее, убеждаемся, что единственное решение есть (0, 0, 0) — система (5) нормальна.

Для нахождения вершин нам придется рассмотреть всевозможные подсистемы из трех уравнений системы (4):

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+z-1&=0,\\ x+2y+z-1&=0,\\ x+y+2z-1&=0; \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 2x+y+z-1&=0,\\ x+2y+z-1&=0,\\ x+y+z-1&=0; \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+z-1&=0,\\ x+y+2z-1&=0,\\ x+y+z-1&=0; \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x+2y+z-1&=0,\\ x+y+2z-1&=0,\\ x+y+z-1&=0. \end{aligned}\right\}$$

Проделав необходимые вычисления, найдем, что все подсистемы правильны, и их решениями являются точки

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \quad (0, 0, 1), \quad (0, 1, 0), \quad (1, 0, 0),$$

из которых первая не удовлетворяет системе (5), а остальные три удовлетворяют. Следовательно, вершины области $\mathcal{K}$:

$$A_1(1, 0, 0), \quad A_2(0, 1, 0), \quad A_3(0, 0, 1).$$

2°. *Нормальная однородная система неравенств* (2). Каждое из неравенств (2) определяет полупространство, граничная плоскость которого проходит через начало координат.

В данном случае пересечением граничных плоскостей является единственная точка — начало координат (система (2) нормальна!). Другими словами, множество $\mathcal{K}_0$ — область решений системы (2) — есть выпуклый многогранный конус с *единственной* вершиной. Из данного в § 4 перечисления выпуклых многогранных конусов следует, что в нашем случае $\mathcal{K}_0$ есть либо бесконечная выпуклая пирамида, либо плоский угол, либо луч, либо, наконец, одна точка (начало координат). Последний случай оставим пока в стороне. Во всех остальных случаях имеем

$$\mathcal{K}_0 = (B_1, B_2, \ldots, B_q),$$

где $B_1, B_2, \ldots, B_q$ — какие-либо точки, выбранные по одной на каждом ребре конуса $\mathcal{K}_0$ (см. теорему 2 § 4). Найти такие точки можно, исходя из следующего соображения. Каждая из них: а) принадлежит $\mathcal{K}_0$, т. е. удовлетворяет системе (2), и б) принадлежит линии пересечения двух различных граней, т. е. удовлетворяет двум непропорциональным *) уравнениям из системы (3).

---

*) Уравнения $ax + by + cz = 0$ и $a'x + b'y + c'z = 0$ мы называем «непропорциональными», если не выполнено хотя бы одно из равенств $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$; в этом случае соответствующие плоскости пересекаются по прямой.

Если окажется, что единственная точка, удовлетворяющая условиям а) и б), есть (0, 0, 0), то область $\mathcal{K}_0$ совпадает с началом координат.

Пример 2. Найти область $\mathcal{K}_0$ решений системы

$$\left.\begin{aligned} 2x+\ y+\ z &\geqslant 0,\\ x+2y+\ z &\geqslant 0,\\ x+\ y+2z &\geqslant 0,\\ x+\ y+\ z &\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

и далее область $\mathcal{K}$ решений системы из примера 1.

Прежде всего заметим, что система (6) связана с системой неравенств (5) из примера 1; именно, (6) есть однородная система, отвечающая (5). Следовательно, система (6) нормальна.

В данном случае систему из двух непропорциональных уравнений можно составить шестью различными способами:

$$\left.\begin{aligned} x+2y+\ z&=0,\\ x+\ y+2z&=0; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 2x+\ y+\ z&=0,\\ x+\ y+2z&=0; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 2x+y+\ z&=0,\\ x+y+\ z&=0; \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x+\ y+\ z&=0,\\ x+2y+\ z&=0; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x+2y+\ z&=0,\\ x+\ y+\ z&=0; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x+y+2z&=0,\\ x+y+\ z&=0. \end{aligned}\right\}$$

Для каждой из этих шести систем выбираем два ненулевых решения: (x, y, z) и $(-x, -y, -z)$. Например, для первой системы можно взять (3, —1, —1) и (—3, 1, 1); неравенствам (6) удовлетворяет только первое из этих решений. Отсюда получаем точку $B_1 = (3, -1, -1)$. Поступая аналогично с остальными пятью системами, находим точки $B_2 = (-1, 3, -1)$ и $B_3 = (-1, -1, 3)$. Итак, область $\mathcal{K}_0$ состоит из точек вида

$$t_1B_1 + t_2B_2 + t_3B_3 = \\ = (3t_1 - t_2 - t_3,\ -t_1 + 3t_2 - t_3,\ -t_1 - t_2 + 3t_3),$$

где t_1, t_2, t_3 — произвольные неотрицательные числа.

Обратимся теперь к системе неравенств (5) из примера 1. Соответствующая ей однородная система, как уже отмечалось, есть как раз (6). Следовательно, область $\mathcal{K}$ имеет вид

$$\langle A_1, A_2, A_3\rangle + \mathcal{K}_0$$

и состоит из точек

$$s_1A_1 + s_2A_2 + s_3A_3 + t_1B_1 + t_2B_2 + t_3B_3 =$$
$$= s_1(1, 0, 0) + s_2(0, 1, 0) + s_3(0, 0, 1) +$$
$$+t_1(3, -1, -1) + t_2(-1, 3, -1) + t_3(-1, -1, 3) =$$
$$= (s_1 + 3t_1 - t_2 - t_3,\ s_2 - t_1 + 3t_2 - t_3,\ s_3 - t_1 - t_2 + 3t_3),$$

где числа t_1, t_2, t_3 произвольные неотрицательные, а s_1, s_2, s_3 неотрицательны и в сумме дают 1.

3°. *Случай, когда система неравенств* (1) *не является нормальной.* Это означает, что область решений $\mathscr{L}$ однородной системы уравнений (3) содержит

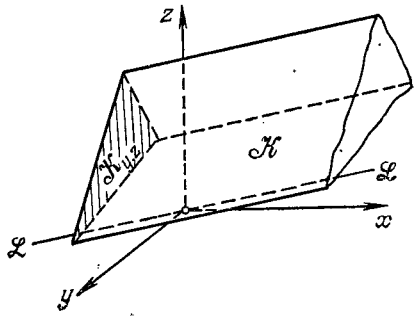

Рис. 44.

точки, отличные от начала координат. Так как $\mathscr{L}$ представляет собой пересечение плоскостей, то возможны два случая:

1. $\mathscr{L}$ есть прямая. Согласно лемме 1 область $\mathscr{K}$ вместе с каждой своей точкой P содержит прямую $P + \mathscr{L}$. Рассмотрим какую-нибудь плоскость $\mathscr{T}$, непараллельную $\mathscr{L}$. Если мы будем знать, какие точки плоскости $\mathscr{T}$ принадлежат области $\mathscr{K}$ — множество этих точек обозначим $\mathscr{K}_{\mathscr{T}}$, — то сможем найти и саму область $\mathscr{K}$, ибо тогда $\mathscr{K} = \mathscr{K}_{\mathscr{T}} + \mathscr{L}$.

Но, какова бы ни была прямая $\mathscr{L}$, в качестве непараллельной ей плоскости $\mathscr{T}$ всегда можно выбрать одну из координатных плоскостей xOy, xOz или yOz. Допустим, например, что $\mathscr{L}$ не параллельна плоскости yOz. Примем эту плоскость за $\mathscr{T}$. В этом случае множество $\mathscr{K}_{\mathscr{T}}$ — будем обозначать его теперь $\mathscr{K}_{y,z}$ — есть часть плоскости yOz, попавшая в $\mathscr{K}$ (рис. 44). Чтобы найти это множество, следует по-

ложить в системе (1) $x=0$. Тогда получим систему неравенств *)

$$\left.\begin{aligned} b_1y+c_1z+d_1 &\geqslant 0,\\ \cdots\cdots\cdots &\\ b_my+c_mz+d_m &\geqslant 0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

которую можно решить методом, изложенным в § 5.

Найдя множество $\mathscr{K}_{y,z}$, сможем записать

$$\mathscr{K}=\mathscr{K}_{y,z}+\mathscr{L} \tag{8}$$

(если прямая $\mathscr{L}$ не параллельна плоскости yOz), что и дает полное описание области $\mathscr{K}$.

Замечание. Если окажется, что множество $\mathscr{K}_{y,z}$ пустое, то и $\mathscr{K}$ пустое. Это означает, что система (1) несовместна.

Пример 3. Найти область $\mathscr{K}$ решений системы

$$\left.\begin{aligned} -2x+y+z-1 &\geqslant 0,\\ -3x-y+4z-1 &\geqslant 0,\\ -x-2y+3z &\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Рассмотрим соответствующую однородную систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} -2x+y+z &= 0,\\ -3x-y+4z &= 0,\\ -x-2y+3z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Решая ее, обнаруживаем, что третье уравнение есть следствие первых двух, так что система сводится к первым двум уравнениям. Множество ее решений $\mathscr{L}$ есть прямая, по которой пересекаются плоскости

$$-2x+y+z=0$$

и

$$-3x-y+4z=0.$$

Выберем какую-нибудь точку B на прямой $\mathscr{L}$, отличную от начала координат. Для этого достаточно найти какие-нибудь три числа x, y, z (не равные од-

*) Система (7), как нетрудно видеть, будет уже нормальной (см. аналогичную сноску на стр. 41).

новременно нулю), удовлетворяющие первым двум уравнениям системы (10). Возьмем, например, 1, 1, 1. Итак, $\mathscr{L}$ есть прямая OB, где $B=(1, 1, 1)$.

Легко видеть, что прямая $\mathscr{L}$ не параллельна, например, координатной плоскости yOz. Полагая в системе (9) $x=0$, получим систему

$$\left.\begin{aligned} y+z-1&\geqslant 0,\\ -y+4z-1&\geqslant 0,\\ -2y+3z&\geqslant 0 \end{aligned}\right\}$$

с двумя неизвестными y и z, которая нормальна. Область ее решений $\mathscr{K}_{y,z}$ можно найти методом, изложенным в § 5. Проделав необходимые вычисления, найдем, что $\mathscr{K}_{y,z}$ есть множество, состоящее из одной точки $A\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$ (в плоскости yOz). Следовательно, искомая область $\mathscr{K}$ состоит из всех точек вида

$$A+tB=\left(0, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)+t(1, 1, 1)=\left(t, \frac{3}{5}+t, \frac{2}{5}+t\right),$$

где t — любое неотрицательное число (область $\mathscr{K}$ есть прямая, параллельная $\mathscr{L}$).

2. $\mathscr{L}$ есть плоскость. Тогда в качестве секущего множества $\mathscr{T}$ берем какую-нибудь прямую, не параллельную этой плоскости; в частности, можно взять одну из координатных осей. Допустим, например, что ось z не параллельна $\mathscr{L}$; примем ее за $\mathscr{T}$. Чтобы найти множество $\mathscr{K}_z$ — часть оси z, попавшую в $\mathscr{K}$,— следует положить в системе (1) $x=0$, $y=0$. Тогда получим систему неравенств

$$\left.\begin{aligned} c_1z+d_1&\geqslant 0,\\ &\cdots\cdots\\ c_mz+d_m&\geqslant 0, \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

которая решается без особого труда *). Найдя множество $\mathscr{K}_z$, сможем записать (рис. 45).

$$\mathscr{K}=\mathscr{K}_z+\mathscr{L} \qquad (12)$$

(если плоскость $\mathscr{L}$ не параллельна оси z), что и дает полное описание $\mathscr{K}$.

*) Система (11) является нормальной.

Замечание. Если множество $\mathcal{K}_z$ окажется пустым, то и $\mathcal{K}$ пустое. В этом случае система (1) несовместна.

Пример 4. Найти область $\mathcal{K}$ решений системы

$$\left.\begin{aligned} x-y+z+1 &\geqslant 0, \\ -x+y-z+2 &\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

В данном случае соответствующая однородная система уравнений имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x-y+z &= 0, \\ -x+y-z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Здесь второе уравнение есть следствие первого, поэтому область решений системы (14) есть плоскость $\mathcal{L}$, определяемая уравнением

$$x-y+z=0.$$

Легко видеть, что эта плоскость пересекает ось z в единственной точке и, следовательно, не параллельна оси z. Найдем множество $\mathcal{K}_z$.

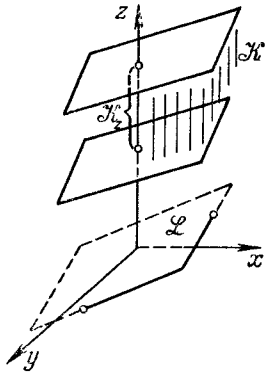

Рис. 45.

Полагая в системе (13) $x=0$, $y=0$, получим систему

$$\left.\begin{aligned} z+1 &\geqslant 0, \\ -z+2 &\geqslant 0, \end{aligned}\right\}$$

из которой следует, что

$$-1 \leqslant z \leqslant 2. \tag{15}$$

Итак, $\mathcal{K}$ есть множество $\mathcal{K}_z + \mathcal{L}$, состоящее из точек вида $(0, 0, z)+(x, y, -x+y)=(x, y, z-x+y)$, где x и y произвольны, а z удовлетворяет неравенствам (15).

Мы заканчиваем этот параграф формулировкой двух теорем, представляющих собой обобщение двух последних теорем § 5 на трехмерный случай. Единственное изменение, которое следует внести для этого в формулировки упомянутых теорем § 5, состоит в замене слова «плоскость» словом «пространство».

Теорема. *Любая (непустая) выпуклая многогранная область в пространстве может быть представлена в виде суммы*

$$\langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle + (B_1, B_2, \ldots, B_q).$$

Теорема. *Любое множество вида*

$$\langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle + (B_1, B_2, \ldots, B_q)$$

в пространстве есть либо все пространство, либо некоторая выпуклая многогранная область в нем.

Доказательства обеих теорем почти дословно повторяют доказательства соответствующих теорем в двумерном случае. Предоставляем читателю детально провести эти доказательства.

§ 7. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ЛЮБЫМ ЧИСЛОМ НЕИЗВЕСТНЫХ

В предыдущих параграфах мы сосредоточили свое внимание на системах неравенств *с двумя или тремя неизвестными.* Такое ограничение диктовалось в основном двумя обстоятельствами: во-первых, тем, что исследование этих систем несложно и целиком укладывается в рамки «школьной» математики; во-вторых (и это в данном случае более существенно), тем, что решения таких систем имеют наглядный геометрический смысл (точки на плоскости или в пространстве). Однако в приложениях (например, к вопросам линейного программирования) чаще встречаются системы неравенств с числом неизвестных $n > 3$. Обойти их молчанием значило бы сильно обеднить изложение вопроса. Поэтому мы постараемся хотя бы кратко рассказать, как обстоит дело при любом $n > 3$.

Для геометрического истолкования системы линейных неравенств с n неизвестными нам необходимо обратиться к так называемому n-мерному пространству.

Начнем с определения соответствующих понятий, причем ограничимся лишь самым необходимым.

Точка n-мерного пространства по определению задается упорядоченным набором из n чисел

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

называемых координатами точки. Мотивом к подобному определению является тот основной для аналитической геометрии факт, что точка на плоскости характеризуется парой чисел, а в пространстве — тройкой чисел. В дальнейшем вместо того, чтобы говорить «точка M имеет координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$», мы

будем писать $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или просто $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Точка $(0, 0, \ldots, 0)$ называется началом координат или просто началом.

Прежде всего укажем, что понимается под «отрезком» в n-мерном пространстве. Согласно § 1, в обычном пространстве отрезок M_1M_2 может быть охарактеризован как множество всех точек вида

$$s_1M_1 + s_2M_2,$$

где s_1, s_2 — любые два неотрицательных числа, дающие в сумме 1. Переходя от трехмерного пространства к n-мерному, мы принимаем эту характеристику *за определение отрезка*. Точнее, пусть

$$M'(x_1', x_2', \ldots, x_n') \quad \text{и} \quad M''(x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')$$

— две произвольные точки n-мерного пространства. Тогда *отрезком $M'M''$ называется множество всех точек вида*

$$s'M' + s''M'' =$$

$$= (s'x_1' + s''x_1'', s'x_2' + s''x_2'', \ldots, s'x_n' + s''x_n''), \quad (1)$$

где s', s'' — любые два неотрицательных числа с суммой 1. При $s' = 1$, $s'' = 0$ мы получаем точку M', при $s' = 0$, $s'' = 1$ — точку M''. Это — *концы* отрезка $M'M''$. Остальные точки (они получаются при $s' > 0$, $s'' > 0$) называются *внутренними точками* отрезка.

Из дальнейших понятий, относящихся к n-мерному пространству, нам понадобится понятие гиперплоскости. Это — обобщение понятия плоскости в обычном трехмерном пространстве. Приставка «гипер» имеет здесь вполне определенный смысл. Дело в том, что в n-мерном пространстве возможны «плоскости» различных типов: одномерные «плоскости» (они называются «прямыми линиями»), двумерные «плоскости» и т. д., наконец, $(n-1)$-мерные «плоскости»; последние и носят название «гиперплоскостей».

Определение. *Гиперплоскостью в n-мерном пространстве называется совокупность точек $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координаты которых удовлетворяют уравнению первой степени*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b = 0, \quad (2)$$

где хотя бы одно из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (коэффициентов при неизвестных) *отлично от нуля*. При $n = 3$

уравнение (2) принимает вид $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + b = 0$ — это есть не что иное, как уравнение плоскости в обычном пространстве (где координаты обозначены x_1, x_2, x_3, а не x, y, z, как обычно).

По отношению к гиперплоскости (2) все n-мерное пространство разбивается на две части: область, в которой выполняется неравенство

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b \geqslant 0, \tag{3}$$

и область, в которой

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b \leqslant 0. \tag{4}$$

Эти области называются полупространствами. Таким образом, каждая гиперплоскость разбивает все пространство на два полупространства, для которых она является общей частью.

Понятие выпуклого тела также обобщается на n-мерный случай. Множество точек в n-мерном пространстве называется выпуклым, если вместе с любыми двумя своими точками M' и M'' оно содержит и весь отрезок $M'M''$.

Нетрудно показать, что *любое полупространство является выпуклым множеством.* В самом деле, пусть точки $M'(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ и $M''(x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')$ принадлежат полупространству (3). Докажем, что и любая точка M отрезка $M'M''$ также принадлежит этому полупространству.

Координаты точки M представляются в виде (1) или, что то же самое, в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= sx_1' + (1-s)x_1'', \\ x_2 &= sx_2' + (1-s)x_2'', \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= sx_n' + (1-s)x_n'' \end{aligned} \qquad (0 \leqslant s \leqslant 1).$$

Подставляя эти выражения в левую часть (3), получим

$$\begin{aligned} a_1(sx_1' + (1-s)x_1'') + a_2(sx_2' + (1-s)x_2'') + \ldots \\ \ldots + a_n(sx_n' + (1-s)x_n'') + b = \\ = s(a_1x_1' + a_2x_2' + \ldots + a_nx_n') + \\ + (1-s)(a_1x_1'' + a_2x_2'' + \ldots + a_nx_n'') + sb + (1-s)b \end{aligned}$$

(мы заменили число b суммой $sb+(1-s)\,b$), что равно

$$s[a_1x_1'+\ldots+a_nx_n'+b]+(1-s)[a_1x_1''+\ldots+a_nx_n''+b].$$

Каждая из двух сумм, заключенных в квадратные скобки, неотрицательна, поскольку обе точки M' и M'' принадлежат полупространству (3). Следовательно, и все написанное выражение неотрицательно (ведь $s\geqslant 0$ и $(1-s)\geqslant 0$). Этим доказано, что точка M принадлежит полупространству (3), т. е. что это полупространство выпукло.

После всего сказанного нетрудно понять, какая геометрическая терминология должна соответствовать системе линейных неравенств с n неизвестными. Пусть дана система

$$\left.\begin{aligned} a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n+a&\geqslant 0,\\ b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_nx_n+b&\geqslant 0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\ c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n+c&\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Каждое из написанных неравенств определяет некоторое полупространство, а все написанные неравенства совместно — некоторую область $\mathcal{K}$ в n-мерном пространстве, являющуюся пересечением конечного числа полупространств. Область $\mathcal{K}$ является выпуклой, так как выпукло любое из образующих ее полупространств.

По аналогии с трехмерным случаем *мы называем область в n-мерном пространстве, являющуюся пересечением конечного числа полупространств, выпуклой многогранной областью, а в случае, когда это пересечение является ограниченным множеством, — просто выпуклым многогранником.* Здесь слова «ограниченное множество» следует понимать в том смысле, что координаты всех точек рассматриваемой области не превосходят по абсолютной величине некоторой постоянной c:

$|x_1|\leqslant c,\ \ldots,\ |x_n|\leqslant c$ для всех точек данной области.

Итак, *совокупность точек n-мерного пространства, координаты которых удовлетворяют системе* (5), *есть выпуклая многогранная область* $\mathcal{K}$, *получающаяся в результате пересечения всех полупространств, отвечающих неравенствам данной системы.*

Отметим еще раз, что если эта область ограничена, то мы называем ее выпуклым многогранником.

Методы фактического описания области $\mathcal{K}$, которые мы рассмотрели в § 5 для систем с двумя неизвестными и в § 6 для систем с тремя неизвестными, с соответствующими изменениями переносятся на случай n неизвестных. Останавливаться, однако, на этом мы не будем, так как исчерпывающее изложение потребовало бы довольно много места. К тому же при большом числе неизвестных эти методы становятся малоэффективными: их использование связано с чересчур громоздкими вычислениями.

Замечательно, что общие теоремы о строении выпуклых многогранных множеств в трехмерном пространстве полностью сохраняют силу в n-мерном пространстве, хотя доказательства усложняются. Ограничимся только формулировками этих теорем и необходимыми пояснениями к ним.

Теорема 1. *Выпуклая оболочка любой конечной системы точек $A_1, A_2, \ldots, A_p$ является выпуклым многогранником.*

Для большей отчетливости подчеркнем, что здесь устанавливается связь между двумя различно определенными типами множеств: выпуклой оболочкой системы точек $A_1, A_2, \ldots, A_p$, которая обозначается $\langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle$ и определяется как множество всех точек вида

$$s_1A_1 + s_2A_2 + \ldots + s_pA_p,$$

где $s_1, s_2, \ldots, s_p$ — любые неотрицательные числа, дающие в сумме 1, и выпуклыми многогранниками, т. е. ограниченными областями, получающимися в результате пересечения конечного числа полупространств.

В двумерном и трехмерном пространствах справедливость теоремы 1 очевидна (хотя бы из наглядного смысла выпуклой оболочки), в многомерном же случае совсем не очевидна и требует доказательства.

Теорема 1′ (обратная к 1). *Любой выпуклый многогранник совпадает с выпуклой оболочкой некоторой конечной системы точек.*

В действительности можно утверждать даже большее: *выпуклый многогранник совпадает с выпуклой оболочкой своих вершин.* Определение вершины — то же самое, что и в двумерном случае (вершина есть такая точка многогранника, которая не является внутренней точкой ни для одного отрезка, целиком принадлежащего многограннику). Можно показать, что число вершин всегда конечно.

Теорема 2. *Любое множество вида $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$ либо совпадает со всем пространством, либо представляет собой некоторый выпуклый многогранный конус с вершиной в начале координат.*

Напомним, что символ $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$ обозначает множество всех точек, представимых в виде

$$t_1B_1 + t_2B_2 + \ldots + t_qB_q,$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_q$ — любые неотрицательные числа. Выпуклый многогранный конус определяется как пересечение конечного числа полупространств, граничные гиперплоскости которых имеют общую точку (вершину конуса). Справедливость теоремы 2 в трехмерном пространстве была установлена в § 4 (теорема 1 § 4).

Теорема 2′. *Любой выпуклый многогранный конус с вершиной в начале координат может быть представлен как* $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$.

Справедливость для трехмерного случая была доказана в § 4 (теорема 2 § 4).

Теорема 3. *Любая выпуклая многогранная область может быть представлена в виде суммы*

$$\langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle + (B_1, B_2, \ldots, B_q).$$

Теорема 3′. *Любая сумма указанного вида есть или все пространство или некоторая выпуклая многогранная область в нем.*

§ 8. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ ПУТЕМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО УМЕНЬШЕНИЯ ЧИСЛА НЕИЗВЕСТНЫХ

Из курса алгебры средней школы читателю известен метод решения системы линейных *уравнений*, заключающийся в последовательном уменьшении числа неизвестных. Для системы, содержащей три неизвестных x, y, z, сущность этого метода можно описать следующим образом.

Из каждого уравнения данной системы выражаем неизвестное z через неизвестные x и y. Затем полученные выражения (куда входят только x и y) приравниваем друг другу. Получаем новую систему — с двумя неизвестными x и y. Например, если исходная система была

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -1,\\ x - y + 2z &= 5,\\ 4y - z &= 5, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

то, разрешив каждое уравнение относительно z, получим

$$\left.\begin{aligned} z &= -2x + 3y - 1,\\ z &= -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{5}{2},\\ z &= 4y - 5; \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

приравняв затем выражения, стоящие в правых частях (достаточно первое из указанных выражений приравнять по очереди каждому из остальных), получим систему

$$\left.\begin{aligned} -2x+3y-1 &= -\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}y+\tfrac{5}{2}, \\ -2x+3y-1 &= \qquad\quad 4y-5 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

с двумя неизвестными x и y. К системе (2) можно применить тот же прием: из уравнений (2) находим

$$\left.\begin{aligned} y &= \tfrac{3}{5}x+\tfrac{7}{5}, \\ y &= -2x+4, \end{aligned}\right\} \qquad (2')$$

после чего получаем уравнение

$$\tfrac{3}{5}x+\tfrac{7}{5}=-2x+4$$

уже с одним неизвестным x. Решив это уравнение, находим $x=1$, после чего из системы (2′) находим $y=2$ и, наконец, из системы (1′) получаем $z=3$.

Оказывается, что нечто подобное можно проделать и с любой системой линейных *неравенств*. Решение системы неравенств с n неизвестными $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ сводится таким путем к решению системы неравенств с $n-1$ неизвестными $x_1, \ldots, x_{n-1}$, затем полученная система может быть сведена к системе с $n-2$ неизвестными $x_1, \ldots, x_{n-2}$ и т. д., пока не придем к системе неравенств с одним неизвестным x_1. А решение системы с одним неизвестным — задача вполне элементарная. Таким путем мы получаем возможность найти (по крайней мере в принципе) любое решение исходной системы неравенств.

Итак, пусть дана система линейных неравенств с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — в дальнейшем для удобства ссылок будем называть ее «система (S)».

При рассмотрении системы (S) возникает ряд вопросов: будет ли система совместной; если да, то как найти все ее решения; как устроены несовместные системы неравенств? На все эти вопросы ответ будет дан здесь и в следующем параграфе. При этом оказывается очень полезным связать с каждой системой линейных неравенств новую систему, в которой число

неизвестных на единицу меньше, чем в исходной системе, — эту новую систему мы называем *сопутствующей*.

Перейдем к ее описанию.

Рассмотрим любое из неравенств системы (S). Оно имеет вид

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a \geqslant 0. \tag{3}$$

Если $a_n = 0$, то оставим это неравенство без изменения. Если $a_n < 0$, то перенесем член a_nx_n в правую часть и разделим обе части неравенства на положительное число $-a_n$; получим неравенство вида

$$b_1x_1 + \ldots + b_{n-1}x_{n-1} + b \geqslant x_n.$$

В случае $a_n > 0$ перенесем в правую часть неравенства все слагаемые, кроме a_nx_n, и разделим обе части на a_n; получим неравенство

$$x_n \geqslant c_1x_1 + \ldots + c_{n-1}x_{n-1} + c.$$

Итак, умножив каждое из неравенств исходной системы на подходящее положительное число, получим *равносильную* ей систему вида

$$\left.\begin{array}{|l|}\hline P_1 \geqslant x_n, \\ P_2 \geqslant x_n, \\ \ldots\ldots \\ P_p \geqslant x_n; \\ \hline\hline x_n \geqslant Q_1, \\ x_n \geqslant Q_2, \\ \ldots\ldots \\ x_n \geqslant Q_q; \\ \hline\hline R_1 \geqslant 0, \\ R_2 \geqslant 0, \\ \ldots\ldots \\ R_r \geqslant 0, \\ \hline \end{array}\right\} \tag{7}$$

где $P_1, \ldots, P_p, Q_1, \ldots, Q_q, R_1, \ldots, R_r$ суть выражения вида $a_1x_1 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1} + a$ (не содержащие x_n)*).

Систему (T) можно записать короче:

$$\left.\begin{aligned} P_\alpha \geqslant x_n \geqslant Q_\beta, \\ R_\gamma \geqslant 0, \end{aligned}\right\}$$

где α — любое из чисел $1, 2, \ldots, p$, β — любое из чисел $1, 2, \ldots, q$, γ — любое из чисел $1, 2, \ldots, r$.

Рассмотрим наряду с системой (T) систему

$$\left.\begin{aligned} P_\alpha \geqslant Q_\beta, \\ R_\gamma \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \qquad (S')$$

(где α — любое из чисел $1, 2, \ldots, p$, β — любое из чисел $1, 2, \ldots, q$, γ — любое из чисел $1, 2, \ldots, r$) с $n-1$ неизвестными $x_1, \ldots, x_{n-1}$**). Условимся называть эту систему *сопутствующей* (по отношению к исходной системе (S) или равносильной ей системе (T)).

Между решениями систем (S) и (S') существует тесная связь. Выражением этой связи служит следующая

Теорема. *Если от любого решения системы (S) отбросить значение последнего неизвестного x_n, то получим некоторое решение сопутствующей системы (S').*

Обратно, для любого решения сопутствующей системы (S') можно найти такое значение неизвестного x_n, присоединив которое, получим решение исходной системы (S).

Первое утверждение теоремы очевидно (если какой-нибудь набор значений неизвестных удовлетворяет системе (S), то он удовлетворяет и системе (T); но тогда для этого же набора выполняются и все неравенства системы (S')). Докажем второе.

---

*) Разумеется, если в системе (S) нет ни одного неравенства, в котором $a_n < 0$, то в системе (T) не будет первого блока. Аналогично, если отсутствуют неравенства с $a_n > 0$, то в системе (T) не будет второго блока. Наконец, если в (S) нет неравенств с $a_n = 0$, то в (T) отсутствует третий блок.

**) Если окажется, что в системе (T) первый или второй блок отсутствует, то (S') будет состоять только из неравенств $R_\gamma \geqslant 0$. Если в (T) отсутствует третий блок, то в (S') будут только неравенства $P_\alpha \geqslant Q_\beta$.

Пусть

$$x_1 = x_1^0, \ldots, x_{n-1} = x_{n-1}^0$$

— какое-нибудь решение системы (S'). Подставив указанные значения неизвестных в выражения $P_1, \ldots, P_p, Q_1, \ldots, Q_q, R_1, \ldots, R_r$, получим некоторые числа $P_1^0, \ldots, P_p^0, Q_1^0, \ldots, Q_q^0, R_1^0, \ldots, R_r^0$. Для них должны выполняться неравенства

$$P_\alpha^0 \geqslant Q_\beta^0 \tag{4}$$

(α — любое из чисел 1, 2, ..., p, а β — любое из чисел 1, 2, ..., q),

$$R_\gamma^0 \geqslant 0 \tag{5}$$

(γ — любое из чисел 1, 2, ..., r).

Первая группа написанных неравенств (т. е. (4)) показывает, что каждое из чисел $Q_1^0, \ldots, Q_q^0$ не больше, чем любое из чисел $P_1^0, \ldots, P_p^0$. Но в таком случае обязательно найдется число x_n^0, которое заключено между всеми числами $Q_1^0, \ldots, Q_q^0$ и всеми числами $P_1^0, \ldots, P_p^0$:

$$P_\alpha^0 \geqslant x_n^0 \geqslant Q_\beta^0,$$

где α — любое из чисел 1, 2, ..., p, а β — любое из чисел 1, 2, ..., q (рис. 46). Но эти неравенства вместе

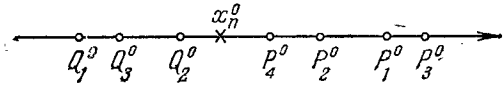

Рис. 46.

с неравенствами (5) означают, что набор значений неизвестных

$$x_1 = x_1^0, \ldots, x_{n-1} = x_{n-1}^0, \quad x_n = x_n^0$$

является решением системы (T), а следовательно, и (S). Теорема доказана.

Следующие два добавления к теореме будут играть дальше важную роль.

1. *Система (S) линейных неравенств совместна тогда и только тогда, когда совместна сопутствующая*

ей система (S'). Это — прямое следствие доказанной теоремы.

2. *Все решения исходной системы* (S) *могут быть получены следующим способом: нужно к каждому решению* $x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0$ *сопутствующей системы* (S') *присоединить любое из чисел* x_n^0, *заключенных между всеми числами* $Q_1^0, \ldots, Q_q^0$ *и всеми числами* $P_1^0, \ldots, P_p^0$. Это предложение фактически было доказано в ходе доказательства теоремы.

Скажем несколько слов о геометрическом смысле доказанной выше теоремы. Допустим, что (S) — система неравенств с *тремя* неизвестными x, y, z. Сопутствующая система (S') есть система с двумя неизвестными x, y. Обозначим через $\mathcal{H}(S)$ область решений системы (S) (это — некоторое множество точек в пространстве) и через $\mathcal{H}(S')$ — область решений системы (S') (множество точек на плоскости). Доказанная теорема в переводе на геомегрический язык означает следующее.

Область $\mathcal{H}(S')$ *есть проекция области* $\mathcal{H}(S)$ *на координатную плоскость* xOy.

Итак, для произвольной системы (S) линейных неравенств с неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ мы построили новую, сопутствующую систему (S'), в которой неизвестными являются $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Но для системы (S') можно, в свою очередь, построить сопутствующую систему (S'') (с неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$), для последней — сопутствующую систему (S''') и т. д. Продолжая этот процесс, мы после ряда шагов придем к системе $(S^{(n-1)})$, состоящей из неравенств с *одним* неизвестным x_1. Из указанного выше предложения 1 вытекает, что система (S) совместна в том и только в том случае, когда совместна система $(S^{(n-1)})$. Но решить вопрос о совместности или несовместности системы с одним неизвестным не представляет никакого труда. Таким образом, мы получаем возможность при помощи весьма простых вычислений узнать, совместна система (S) или нет.

Допустим, что система совместна. Тогда возникает задача — решить систему или, говоря более подробно, *указать все ее решения* (все наборы значений неизвестных, для которых выполняются неравенства данной системы). Мы станем на следующую точку зрения (хотя вначале она покажется читателю странной): *система* (S) *решена, если построены системы* (S'),

(S''), ..., $(S^{(n-1)})$. Чем объясняется такая точка зрения, мы сейчас увидим, но сперва введем одно

Определение. Набор значений первых k неизвестных

$$x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_k^0$$

называется *допустимым*, если его можно продолжить до решения исходной системы (S), т. е. если существуют такие числа $x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0$, что набор $x_1^0, \ldots, x_k^0, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0$ является решением системы (S).

Как только построены системы (S'), (S'') и т. д., мы получаем возможность:

1) найти все допустимые значения неизвестного x_1 (из системы $(S^{(n-1)})$);

2) для любого конкретного допустимого значения x_1^0 найти все совместные с ним значения неизвестного x_2, т. е. такие значения, которые вместе с x_1^0 образуют допустимый набор (они находятся путем подстановки x_1^0 в систему $(S^{(n-2)})$;

3) для любого конкретного допустимого набора x_1^0, x_2^0 найти все совместные с ним значения неизвестного x_3 (они находятся путем подстановки x_1^0 и x_2^0 в систему $(S^{(n-3)})$) и т. д.

Именно в этом смысле и следует понимать наше утверждение, что система (S) решена, если построены системы (S'), (S''), ..., $(S^{(n-1)})$.

Пример. Решим в указанном смысле систему

$$\left.\begin{aligned} 7x+2y-2z-4 &\geqslant 0,\\ -x-\ y-\ z+4 &\geqslant 0,\\ -2x+3y+\ z-1 &\geqslant 0,\\ 5x-\ y+\ z+2 &\geqslant 0. \end{aligned}\right\}$$

Разрешив каждое неравенство системы относительно z, запишем систему в виде

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{7}{2}x+y-2 &\geqslant z,\\ -x-y+4 &\geqslant z,\\ z &\geqslant\ \ 2x-3y+1,\\ z &\geqslant -5x+\ y-2. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Сопутствующая система имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{7}{2}x+y-2 &\geqslant 2x-3y+1,\\ \tfrac{7}{2}x+y-2 &\geqslant -5x+y-2,\\ -x-y+4 &\geqslant 2x-3y+1,\\ -x-y+4 &\geqslant -5x+y-2 \end{aligned}\right\}$$

или, после приведения подобных членов,

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{3}{2}x+4y-3 &\geqslant 0,\\ \tfrac{17}{2}x &\geqslant 0,\\ -3x+2y+3 &\geqslant 0,\\ 4x-2y+6 &\geqslant 0. \end{aligned}\right\}$$

Разрешив каждое неравенство относительно y, запишем эту систему в виде

$$\left.\begin{aligned} y &\geqslant -\tfrac{3}{8}x+\tfrac{3}{4},\\ y &\geqslant \tfrac{3}{2}x-\tfrac{3}{2},\\ 2x+3 &\geqslant y,\\ x &\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Система, сопутствующая этой, имеет вид

$$\left.\begin{aligned} 2x+3 &\geqslant -\tfrac{3}{8}x+\tfrac{3}{4},\\ 2x+3 &\geqslant \tfrac{3}{2}x-\tfrac{3}{2},\\ x &\geqslant 0; \end{aligned}\right\}$$

она равносильна одному неравенству

$$x \geqslant 0. \qquad (8)$$

Итак, исходная система совместна. Согласно принятой нами точке зрения, системы (8), (7), (6) дают решение поставленной задачи. Именно, неравенство (8) показывает, что существует решение (x, y, z) исходной системы с любым неотрицательным x. Если выбрано конкретное значение x, то из системы (7)

можно найти возможные значения для y. Если выбраны конкретные значения для x и y, то из системы (6) найдутся возможные значения z.

Положим, например, $x = 1$; тогда из системы (7) получим следующие неравенства, ограничивающие y:

$$5 \geqslant y \geqslant \frac{3}{8}.$$

Возьмем, например, $y = 4$. Полагая в системе (6) $x = 1$, $y = 4$, получим неравенства, ограничивающие z:

$$\frac{11}{2} \geqslant z,$$

$$-1 \geqslant z,$$

$$z \geqslant -9,$$

$$z \geqslant -3$$

или просто

$$-1 \geqslant z \geqslant -3.$$

Полагая, например, $z = -2$, получим одно из решений исходной системы: $x = 1$, $y = 4$, $z = -2$.

§ 9. НЕСОВМЕСТНЫЕ СИСТЕМЫ

До сих пор нас интересовали преимущественно такие системы неравенств, которые имели хотя бы одно решение (были совместны). Что касается несовместных систем, то их изучение представляется, на первый взгляд, ненужным занятием; к тому же кажется мало правдоподобным, чтобы с такими системами можно было связать сколько-нибудь содержательную теорию. В действительности же дело обстоит совсем иначе: свойства несовместных систем не только представляют интерес сами по себе, но и дают ключ к пониманию целого ряда важных фактов. Так, например, основная теорема линейного программирования (теорема двойственности, см. § 14) выводится в конечном счете из некоторых свойств несовместных систем.

Рассмотрим произвольную систему линейных неравенств. Для удобства записей будем пока считать, что число неизвестных равно трем, хотя все сказанное в равной мере будет относиться к системам с любым числом неизвестных.

Итак, дана система

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \geqslant 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \geqslant 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_mx + b_my + c_mz + d_m \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Умножим обе части первого из неравенств (1) на какое-либо неотрицательное число k_1, обе части второго — на неотрицательное число k_2 и т. д., а затем полученные неравенства сложим. В результате мы придем к неравенству

$$\begin{aligned} &(k_1a_1 + k_2a_2 + \dots + k_ma_m)\,x + \\ &+ (k_1b_1 + k_2b_2 + \dots + k_mb_m)\,y + \\ &+ (k_1c_1 + k_2c_2 + \dots + k_mc_m)\,z + \\ &+ k_1d_1 + k_2d_2 + \dots + k_md_m \geqslant 0, \end{aligned} \quad (2)$$

которое будем называть *комбинацией неравенств* (1).

Может случиться, что некоторая комбинация неравенств (1) представляет собой неравенство вида

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + d \geqslant 0, \quad (3)$$

где d — строго отрицательное число (после деления на $|d|$ получается тогда неравенство $-1 \geqslant 0$). Ясно, что никакой набор значений неизвестных такому неравенству удовлетворять не будет, поэтому в рассматриваемом случае система (1) несовместна (не имеет решений). Весьма замечательно, что справедливо и обратное предложение, а именно: если система (1) несовместна, то некоторая комбинация ее неравенств имеет вид (3), где $d < 0$.

Это предложение мы докажем сейчас в общем виде (т. е. для систем с любым числом неизвестных), но прежде введем такое *определение*. Условимся называть неравенство

$$ax + by + cz + d \geqslant 0$$

противоречивым, если ему не удовлетворяет ни один набор значений неизвестных. Очевидно, любое

противоречивое неравенство имеет вид (3), где $d < 0$ (докажите это!). Предложение, которое мы должны доказать, можно теперь сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема о несовместных системах неравенств. *Если система линейных неравенств несовместна, то некоторая комбинация этих неравенств есть противоречивое неравенство.*

Доказательство проведем индукцией по n — числу неизвестных в нашей системе.

При $n = 1$ система имеет вид

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1 &\geqslant 0, \\ a_2x + b_2 &\geqslant 0, \\ &\cdots\cdots \\ a_mx + b_m &\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Можно считать, что все коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_m$ отличны от нуля. Действительно, если, например, $a_1 = 0$, то первое неравенство имеет вид $0 \cdot x + b_1 \geqslant 0$; если число b_1 неотрицательно, то такое неравенство можно отбросить, если же b_1 отрицательно, то первое неравенство нашей системы противоречиво, и доказывать нечего.

Итак, будем считать, что ни одно из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$ не равно нулю. Легко видеть, что среди этих чисел обязательно должны быть как положительные, так и отрицательные: в самом деле, если бы все указанные числа имели один и тот же знак, например, были положительны, то система (4) приводилась бы к виду

$$\left.\begin{aligned} x &\geqslant -\frac{b_1}{a_1}, \\ x &\geqslant -\frac{b_2}{a_2}, \\ &\cdots\cdots \\ x &\geqslant -\frac{b_m}{a_m} \end{aligned}\right\}$$

и, следовательно, была бы совместной.

Предположим, для определенности, что первые k из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$ положительны, а остальные $m - k$ отрицательны. Тогда система (4) равносильна

системе

$$\left.\begin{array}{l} x \geqslant -\dfrac{b_1}{a_1}, \\ \ldots\ldots \\ x \geqslant -\dfrac{b_k}{a_k}, \\ \hline x \leqslant -\dfrac{b_{k+1}}{a_{k+1}}, \\ \ldots\ldots \\ x \leqslant -\dfrac{b_m}{a_m}. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Выберем среди чисел $-\frac{b_1}{a_1}, \ldots, -\frac{b_k}{a_k}$ наибольшее; пусть, например, таким является $-\frac{b_1}{a_1}$. Тогда в системе (5) первые k неравенств могут быть заменены одним лишь первым неравенством. Аналогично среди чисел $-\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}, \ldots, -\frac{b_m}{a_m}$ выберем наименьшее, тогда остальные $m - k$ неравенств системы (5) могут быть заменены одним лишь последним неравенством. Таким образом, система (4) равносильна системе из двух неравенств:

$$\left.\begin{array}{l} x \geqslant -\dfrac{b_1}{a_1}, \\ x \leqslant -\dfrac{b_m}{a_m}, \end{array}\right\}$$

и ее несовместность означает, что

$$-\frac{b_1}{a_1} > -\frac{b_m}{a_m}. \tag{6}$$

Из (6) вытекает

$$b_m a_1 - b_1 a_m < 0 \tag{7}$$

(следует учесть, что $a_1 > 0$ и $a_m < 0$). Если теперь первое из неравенств (4) умножить на положительное число $-a_m$, а последнее — на положительное число a_1, а затем произвести сложение, то получится неравенство

$$0 \cdot x + (b_m a_1 - b_1 a_m) \geqslant 0, \tag{8}$$

которое в силу (7) является противоречивым. Итак, для систем с одним неизвестным теорема справедлива.

Предположим теперь, что утверждение теоремы справедливо для систем неравенств с $n-1$ неизвестными, и в этом предположении установим его справедливость для случая n неизвестных.

Итак, пусть дана несовместная система линейных неравенств с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$; придерживаясь обозначений предыдущего параграфа, назовем ее «система (S)». Построим для нее сопутствующую систему (S'); последняя будет несовместна вслед за (S). Поскольку число неизвестных в системе (S') равно $n-1$, то к ней применимо предположение индукции. Это означает, что некоторая комбинация неравенств системы (S') представляет собой противоречивое неравенство. Но нетрудно видеть, что каждое неравенство системы (S') является комбинацией неравенств из (S): действительно, если просто сложить неравенства $P_\alpha \geqslant x_n$ и $x_n \geqslant Q_\beta$ системы (S), то получим $P_\alpha + x_n \geqslant x_n + Q_\beta$ или $P_\alpha \geqslant Q_\beta$, т. е. одно из неравенств системы (S') (см. § 8, системы (T) и (S')). Отсюда, в свою очередь, вытекает, что некоторая комбинация неравенств исходной системы (S) есть противоречивое неравенство. Теорема доказана.

Теорема о несовместных системах линейных неравенств — лишь одно из проявлений глубокой аналогии, которая существует между свойствами систем линейных неравенств и свойствами *систем линейных уравнений*. Попробуем заменить в формулировке теоремы слово «неравенство» словом «уравнение». Получится следующее предложение:

Если система линейных уравнений несовместна, то некоторая комбинация этих уравнений есть противоречивое уравнение.

Оказывается, *это предложение тоже справедливо.* В несколько иной формулировке оно носит название теоремы Кронекера—Капелли и доказывается в курсе линейной алгебры (так называется раздел математики, в котором изучаются линейные операции, т. е. операции, подобные сложению точек и умножению точки на число в n-мерном пространстве). Впрочем, для правильного понимания сказанного выше необходимо внести уточнение в понятие

комбинации. Комбинация уравнений строится тем же путем, что и комбинация неравенств, с той только разницей, что разрешается умножать данные уравнения *на какие угодно*, а не только неотрицательные числа. Противоречивым, как и в случае неравенств, называется уравнение, не имеющее решений. Нетрудно показать, что противоречивое уравнение обязательно должно иметь вид

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ \ldots \ + 0 \cdot x_n + b = 0, \qquad (9)$$

где b — число, отличное от нуля (после деления обеих частей на b получаем «уравнение» $1 = 0$).

Особо важным является один частный случай теоремы о несовместных системах неравенств, а именно, когда данная система содержит неравенства

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \ \ldots, \ x_n \geqslant 0. \qquad (10)$$

Обозначив остальную часть системы через (S), можно сказать, что задача состоит в отыскании всех *неотрицательных* (т. е. удовлетворяющих условиям (10)) решений системы (S). Если эта задача не имеет решений, то, согласно только что доказанной теореме, некоторая комбинация неравенств системы (S),

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ \ldots \ + a_nx_n + a \geqslant 0, \qquad (11)$$

в сумме с некоторой комбинацией неравенств (10),

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \ \ldots \ + k_nx_n \geqslant 0$$

($k_1, k_2, \ldots, k_n$ неотрицательны),

дает противоречивое неравенство

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ \ldots \ + 0 \cdot x_n + c \geqslant 0,$$

где c — отрицательное число. Следовательно,

$$a_1 = -k_1 \leqslant 0, \ a_2 = -k_2 \leqslant 0, \ \ldots, \ a_n = -k_n \leqslant 0,$$

$$a < 0.$$

Сформулируем полученный результат в виде отдельного предложения.

Следствие из теоремы о несовместных системах. *Если система неравенств не имеет неотрицательных решений, то некоторая комбинация этих неравенств есть неравенство вида* (11), *где все коэффициенты* $a_1, a_2, \ldots, a_n \leqslant 0$, *а свободный член* $a < 0$.

§ 10. ОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ НАБОР РЕШЕНИЙ

В § 8 мы рассмотрели способ нахождения решений системы линейных неравенств. При всех очевидных достоинствах этого способа некоторые вопросы решить с его помощью нельзя; например, указанный способ не позволяет обозреть *множество всех решений* данной системы неравенств. Именно этой цели и посвящены ближайшие два параграфа нашей книжки. Основные трудности, как мы увидим, связаны с рассмотрением *однородных* систем — этой задаче посвящен настоящий параграф; общий же случай (т. е. неоднородная система неравенств) разбирается в § 11. При этом нет особой необходимости ограничивать себя случаем двух или трех неизвестных: с самого начала мы будем рассматривать систему из любого числа неравенств с любым числом неизвестных. Для удобства читателя разобьем изложение на ряд пунктов.

1°. *Линейная функция от n аргументов.* Общий вид однородного неравенства с n неизвестными есть

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geqslant 0.$$

Рассмотрим отдельно выражение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n, \tag{1}$$

стоящее в левой части неравенства. Это выражение называется *линейной функцией.* Роль аргументов играют n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Впрочем, можно считать, что функция (1) зависит не от n аргументов, а от *одного*: этим аргументом является точка

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

n-мерного пространства.

Условимся в дальнейшем функцию (1) обозначать кратко $L(X)$:

$$L(X) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n;$$

если же задана не одна такая функция, а несколько, то будем обозначать их $L_1(X)$, $L_2(X)$ и т. д.

Установим следующие два свойства линейной функции.

1.

$$L(kX) = kL(X),$$

где X — любая точка, а k — любое число.

2.

$$L(X+Y)=L(X)+L(Y),$$

где X и Y — любые две точки.

Свойство 1 очевидным образом следует из равенства

$$a_1(kx_1)+a_2(kx_2)+\ldots+a_n(kx_n)=$$
$$=k(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n).$$

Докажем теперь свойство 2. Пусть

$$X=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \quad \text{и} \quad Y=(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n).$$

Тогда

$$L(X+Y)=a_1(x_1+y_1)+a_2(x_2+y_2)+\ \ldots,$$
$$\ldots+a_n(x_n+y_n)=(a_1x_1+a_2x_2+\ \ldots\ +a_nx_n)+$$
$$+(a_1y_1+a_2y_2+\ \ldots\ +a_ny_n)=L(X)+L(Y).$$

2°. *Некоторые свойства решений однородной системы линейных неравенств.* Пусть дана однородная система m линейных неравенств с n неизвестными:

$$\left.\begin{array}{ll} a_1x_1+a_2x_2+\ \ldots\ +a_nx_n\geqslant 0 & \text{(1-е неравенство)},\\ b_1x_1+b_2x_2+\ \ldots\ +b_nx_n\geqslant 0 & \text{(2-е неравенство)},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ c_1x_1+c_2x_2+\ \ldots\ +c_nx_n\geqslant 0 & (m\text{-е неравенство}). \end{array}\right\}$$

Обозначив левые части неравенств соответственно $L_1(X)$, $L_2(X)$, ..., $L_m(X)$, перепишем данную систему в виде

$$\left.\begin{array}{l} L_1(X)\geqslant 0,\\ L_2(X)\geqslant 0,\\ \ldots\ldots\\ L_m(X)\geqslant 0, \end{array}\right\} \qquad (2)$$

где

$$X=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n).$$

Установим следующие два предложения.

1. *Если точка X есть решение системы* (2) *и k — любое неотрицательное число, то точка kX есть снова решение системы* (2).

2. *Если X и Y — два решения системы* (2), *то $X+Y$ есть снова решение системы* (2).

Оба предложения легко следуют из доказанных в п. 1° свойств линейной функции. Действительно, пусть i — любой из номеров 1, 2, ..., m. Имеем

$$L_i(kX) = kL_i(X) \geqslant 0$$

(ибо $k \geqslant 0$ и $L_i(X) \geqslant 0$), а также

$$L_i(X+Y) = L_i(X) + L_i(Y) \geqslant 0$$

(ибо $L_i(X) \geqslant 0$ и $L_i(Y) \geqslant 0$).

Из предложений 1 и 2 непосредственно вытекает такое следствие.

Если некоторые точки $X_1, X_2, \ldots, X_p$ являются решениями системы (2), *то и любая точка вида*

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \ldots + k_pX_p, \tag{3}$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_p$ — неотрицательные числа, тоже является решением системы (2).

Действительно, каждая из точек $k_1X_1, k_2X_2, \ldots, k_pX_p$ в силу предложения 1 является решением системы (2), но тогда и сумма этих точек в силу предложения 2 будет решением системы (2).

Условимся называть любую точку вида (3), где $k_1, k_2, \ldots, k_p$ — неотрицательные числа, *неотрицательной комбинацией* точек $X_1, X_2, \ldots, X_p$. Тогда указанное выше следствие будет допускать такую формулировку.

Неотрицательная комбинация любого числа решений однородной системы (2) *есть снова решение этой системы.*

3°. *Фундаментальный набор решений.* Введем такое определение.

Набор из конечного числа решений

$$X_1, X_2, \ldots, X_p$$

однородной системы (2) называется *фундаментальным набором* решений, если любое решение X этой системы может быть задано формулой

$$X = k_1X_1 + k_2X_2 + \ldots + k_pX_p, \tag{4}$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_p$ — неотрицательные числа. В этом случае, следовательно, формула (4), в которой $k_1, k_2, \ldots, k_p$ — любые неотрицательные числа, дает

обозрение *всех решений* системы (2). Отсюда ясно, что нахождение фундаментального набора решений есть задача первостепенной важности при исследовании системы (2). Конечной целью наших построений и будет как раз являться выработка алгоритма, позволяющего с помощью весьма простых операций находить фундаментальный набор решений для любой системы (2).

4°. *Построение фундаментального набора для системы, состоящей из одного неравенства.* Построим фундаментальный набор решений для неравенства

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geqslant 0, \tag{5}$$

где числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не равны одновременно нулю.

Для этой цели рассмотрим наряду с неравенством (5) уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0. \tag{6}$$

Из свойств линейной функции, доказанных в п. 1°, легко вытекают следующие два предложения:

1. Если X — какое-нибудь решение уравнения (6) и k — любое число, то kX — снова решение уравнения (6).

2. Если X и Y — два решения уравнения (6), то $X + Y$ есть снова решение уравнения (6).

Доказательства предоставляем читателю.

По условию, среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеются не равные нулю. Положим, например, что $a_n \neq 0$. Тогда уравнение можно записать в виде

$$x_n = -\frac{1}{a_n}(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1}). \tag{6'}$$

Полагая $x_1 = 1$, $x_2 = 0, \ldots, x_{n-1} = 0$, найдем из последнего уравнения $x_n = -\frac{a_1}{a_n}$. Таким образом, точка

$$X_1 = \left(1, 0, \ldots, 0, -\frac{a_1}{a_n}\right)$$

является решением уравнения (6). Аналогичным образом можно получить решения

$$X_2 = \left(0, 1, \ldots, 0, -\frac{a_2}{a_n}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_{n-1} = \left(0, 0, \ldots, 1, -\frac{a_{n-1}}{a_n}\right).$$

Пусть теперь

$$X = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) \tag{7}$$

— любое решение уравнения (6). Имеем, согласно (6′),

$$\alpha_n = -\frac{1}{a_n}(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_{n-1}\alpha_{n-1}) =$$

$$= \alpha_1\left(-\frac{a_1}{a_n}\right) + \alpha_2\left(-\frac{a_2}{a_n}\right) + \ldots + \alpha_{n-1}\left(-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right).$$

Рассматривая точку

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_{n-1} X_{n-1} =$$

$$= \alpha_1\left(1, 0, \ldots, -\frac{a_1}{a_n}\right) + \alpha_2\left(0, 1, \ldots, -\frac{a_2}{a_n}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \alpha_{n-1}\left(0, 0, \ldots, 1, -\frac{a_{n-1}}{a_n}\right),$$

убеждаемся, что ее координаты совпадают с координатами точки X. Поэтому справедливо равенство

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_{n-1} X_{n-1}. \tag{8}$$

Добавим теперь к построенным ранее точкам X_1, X_2, ..., X_{n-1} еще одну:

$$X_n = -(X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1}). \tag{9}$$

Из указанных в начале этого пункта свойств решений уравнения (6) следует, что точка X_n тоже является решением. Теперь нетрудно доказать следующий факт: *любое решение X уравнения* (6) *является неотрицательной комбинацией решений* $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, X_n$.

В самом деле, пусть α — положительное число, превосходящее любое из чисел $|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_{n-1}|$. Из (8) и (9) следует

$$X = (\alpha_1 + \alpha) X_1 + (\alpha_2 + \alpha) X_2 + \ldots$$

$$\ldots + (\alpha_{n-1} + \alpha) X_{n-1} + \alpha X_n,$$

что и служит доказательством нашего утверждения.

Для краткости дальнейших записей обозначим левую часть уравнения (6) через $L(X)$. Выберем какое-нибудь решение уравнения $L(X) = 1$ и обозначим это решение X_{n+1}. Мы утверждаем, что *набор точек*

$$X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, X_n, X_{n+1} \tag{10}$$

является фундаментальным набором решений для неравенства (5).

В самом деле, каждая из указанных точек удовлетворяет неравенству (5). Пусть теперь X' — любое решение этого неравенства; следовательно, $L(X') = a$, где $a \geqslant 0$. Тогда точка

$$X = X' - aX_{n+1}$$

удовлетворяет уравнению (6), ибо

$$L(X) = L(X') - aL(X_{n+1}) = a - a \cdot 1 = 0.$$

Если теперь записать

$$X' = X + aX_{n+1}$$

и учесть, что точка X является неотрицательной комбинацией точек $X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n$, то станет ясно, что X' представима в виде неотрицательной комбинации точек (10).

Рассмотрим конкретный пример. Пусть требуется построить фундаментальный набор решений для неравенства

$$-2x_1 - 4x_2 + x_3 \geqslant 0 \qquad (11)$$

с тремя неизвестными x_1, x_2, x_3.

Прежде всего записываем уравнение

$$-2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0$$

и разрешаем его относительно одного из неизвестных, например, x_3:

$$x_3 = 2x_1 + 4x_2.$$

Теперь последовательно полагаем одно из неизвестных x_1, x_2 (входящих в правую часть уравнения) равным 1, а остальные нулю. Получаем такие решения:

$$X_1 = (1, 0, 2), \quad X_2 = (0, 1, 4).$$

Далее, в качестве X_3 берем точку

$$X_3 = -(X_1 + X_2) = (-1, -1, -6)$$

и, наконец, за X_4 принимаем одно из решений уравнения

$$-2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1,$$

например, $X_4 = (0, 0, 1)$.

Точки X_1, X_2, X_3, X_4 образуют фундаментальный набор решений для неравенства (11). Общее решение имеет вид

$$X = k_1X_1 + k_2X_2 + k_3X_3 + k_4X_4 =$$
$$= k_1(1, 0, 2) + k_2(0, 1, 4) + k_3(-1, -1, -6) + k_4(0, 0, 1)$$

или

$$\begin{aligned} x_1 &= k_1 - k_3, \\ x_2 &= k_2 - k_3, \\ x_3 &= 2k_1 + 4k_2 - 6k_3 + k_4, \end{aligned}$$

где k_1, k_2, k_3, k_4 — произвольные неотрицательные числа.

5°. *Перестройка фундаментального набора решений при добавлении к системе еще одного неравенства.* Чтобы научиться строить фундаментальные наборы решений, рассмотрим вначале такую задачу.

Пусть дана однородная система

$$\left.\begin{aligned} L_1(X) &\geqslant 0, \\ L_2(X) &\geqslant 0, \\ &\cdots\cdots \\ L_m(X) &\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

линейных неравенств. Пусть, далее, известен фундаментальный набор решений

$$X_1, X_2, \ldots, X_p$$

для этой системы. Требуется построить фундаментальный набор решений для системы, полученной добавлением к (12) *еще одного неравенства*

$$L(X) \geqslant 0. \tag{13}$$

Решения системы (12) — это в точности все неотрицательные комбинации точек $X_1, X_2, \ldots, X_p$. Среди этих комбинаций нам нужно выбрать такие, которые удовлетворяли бы неравенству (13) и, более того, составили бы фундаментальный набор решений для системы (12), (13).

По отношению к функции $L(X)$ — левой части неравенства (13) — все точки $X_1, X_2, \ldots, X_p$ можно разбить на три группы: точки, для которых $L(X) > 0$, точки, для которых $L(X) \leqslant 0$ и, наконец, точки, для

которых $L(X) = 0$. Точки первой группы обозначим $X_1^+, X_2^+, \ldots, X_k^+$, точки второй группы — $X_1^-, X_2^-, \ldots$ $\ldots, X_l^-$, точки третьей группы — $X_1^0, X_2^0, \ldots, X_s^0$. Таким образом,

$$X_1^+, \ldots, X_k^+, X_1^-, \ldots, X_l^-, X_1^0, \ldots, X_s^0$$

— это те же самые точки $X_1, X_2, \ldots, X_p$, но только расположенные, может быть, в другом порядке.

Разумеется, все точки X_α^+ ($\alpha = 1, \ldots, k$) удовлетворяют неравенству (13). То же самое относится и к X_γ^0 ($\gamma = 1, \ldots, s$). Что же касается точек X_β^- ($\beta = 1, \ldots, l$), то из них ни одна не является решением неравенства (13). Однако, из каждой пары

$$X_\alpha^+, \quad X_\beta^-$$

(одна точка «плюсовая» и одна «минусовая») можно образовать неотрицательную комбинацию

$$aX_\alpha^+ + bX_\beta^- \tag{14}$$

так, чтобы она удовлетворяла условию $L(X) = 0$. Для этого следует взять

$$a = -L(X_\beta^-), \qquad b = L(X_\alpha^+). \tag{15}$$

Действительно, числа a и b положительны и, кроме того,

$$L(aX_\alpha^+ + bX_\beta^-) = aL(X_\alpha^+) + bL(X_\beta^-) =$$
$$= -L(X_\beta^-)L(X_\alpha^+) + L(X_\alpha^+)L(X_\beta^-) = 0.$$

Обозначим точку (14), где a и b имеют указанные выше значения, через $X_{\alpha\beta}^0$:

$$X_{\alpha\beta}^0 = -L(X_\beta^-)X_\alpha^+ + L(X_\alpha^+)X_\beta^-. \tag{16}$$

Ответ к поставленной нами задаче дает следующая Теорема. *Точки*

$$X_1^+, \ldots, X_k^+, X_1^0, \ldots, X_s^0, X_{11}^0, X_{12}^0, \ldots, X_{kl}^0 \tag{17}$$

(всего здесь записано $k + s + kl$ точек) *образуют фундаментальный набор решений для системы* (12), (13).

Чтобы доказать теорему, установим сначала такую лемму.

Лемма. *Любая неотрицательная комбинация точек* X_α^+ *и* X_β^- *может быть представлена как неотрицательная комбинация точек* X_α^+, $X_{\alpha\beta}^0$ *или же как неотрицательная комбинация точек* X_β^-, $X_{\alpha\beta}^0$.

Доказательство леммы. Пусть

$$X = cX_\alpha^+ + dX_\beta^-$$

— неотрицательная комбинация точек X_α^+ и X_β^-. Рассмотрим наряду с X точку

$$X_{\alpha\beta}^0 = aX_\alpha^+ + bX_\beta^-,$$

где числа a и b определены формулами (15). Сравним два отношения: $\frac{c}{a}$ и $\frac{d}{b}$. Если первое больше второго, то, полагая $\frac{d}{b} = \lambda$, $\frac{c}{a} = \lambda + \mu$, где $\mu > 0$, будем иметь:

$$X = (\lambda a + \mu a) X_\alpha^+ + \lambda b X_\beta^- = \lambda X_{\alpha\beta}^0 + \mu a X_\alpha^+,$$

т. е. точка X представима в виде неотрицательной комбинации X_α^+ и $X_{\alpha\beta}^0$. Если указанные выше отношения равны, то $X = \lambda X_{\alpha\beta}^0$. Наконец, если $\frac{c}{a} < \frac{d}{b}$, то, полагая $\frac{c}{a} = \lambda$, $\frac{d}{b} = \lambda + \mu$, где $\mu > 0$, получим

$$X = \lambda X_{\alpha\beta}^0 + \mu b X_\beta^-.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Прежде всего заметим, что каждая из точек (17) удовлетворяет системе (12), (13). Поэтому, чтобы доказать теорему, нам остается лишь проверить следующее: если какая-то точка X является решением системы (12), (13), то она представима в виде неотрицательной комбинации точек (17).

Будучи решением системы (12), точка X представляется в виде неотрицательной комбинации ее фундаментальных точек $X_1, X_2, \ldots, X_p$:

$$X = a_1 X_1^+ + \ldots + a_k X_k^+ + b_1 X_1^- + \ldots$$
$$\ldots + b_l X_l^- + c_1 X_1^0 + \ldots + c_s X_s^0, \quad (18)$$

где все коэффициенты $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l, c_1, \ldots, c_s$ неотрицательны.

Если все числа $b_1, \ldots, b_l$ равны нулю, то, очевидно, доказывать нечего. Предположим поэтому, что среди указанных чисел имеются строго положительные. Заметим, что тогда среди чисел $a_1, \ldots, a_k$ тоже имеются строго положительные: в противном случае получилось бы

$$L(X) = b_1 L(X_1^-) + \ldots + b_l L(X_l^-) + c_1 L(X_1^0) + \ldots \\ \ldots + c_s L(X_s^0),$$

что невозможно, так как X удовлетворяет неравенству (13).

Допустим, для определенности, что $a_1 > 0$ и $b_1 > 0$. Пользуясь леммой, можно заменить сумму $a_1 X_1^+ + b_1 X_1^-$ неотрицательной комбинацией точек X_1^+, X_{11}^0 или же точек X_1^-, X_{11}^0. Если в выражении для точки X произвести такую замену, то общее число отличных от нуля коэффициентов при $X_1^+, \ldots, X_k^+, X_1^-, \ldots, X_l^-$ уменьшится по крайней мере на 1. Если при этом окажется, что во вновь полученном выражении для X не все коэффициенты при $X_1^-, \ldots, X_l^-$ равны нулю, то снова заменим одну из сумм вида $aX_\alpha^+ + bX_\beta^-$ неотрицательной комбинацией точек X_α^+, $X_{\alpha\beta}^0$ или же точек X_β^-, $X_{\alpha\beta}^0$; в результате число отличных от нуля коэффициентов при $X_1^+, \ldots, X_k^+, X_1^-, \ldots, X_l^-$ уменьшится еще по крайней мере на 1. Так будет продолжаться до тех пор, пока для точки X не получится выражение, в котором все коэффициенты при $X_1^-, \ldots, X_l^-$ будут равны нулю. Мы придем тогда к равенству вида

$$X = a_1' X_1^+ + \ldots + a_k' X_k^+ + \sum_{\alpha, \beta} d_{\alpha\beta} X_{\alpha\beta}^0 + \\ + c_1 X_1^0 + \ldots + c_s X_s^0,$$

где все коэффициенты справа больше либо равны нулю. Но это и есть требуемое представление для X. Теорема доказана.

6°. *Существование и способ построения фундаментального набора решений.* Рассмотрим произвольную систему однородных линейных неравенств. Для первого неравенства системы можно (способом, описанным в п. 4°) построить фундаментальный набор решений. Присоединив к первому неравенству второе, можно, опираясь на теорему п. 5°, построить фундаментальный набор решений для системы, состоящей из первых двух неравенств. Далее присоединяем третье неравенство и т. д., пока не получим фундаментальный набор решений для всей исходной системы неравенств. Этим доказано существование и одновременно указан способ построения фундаментального набора решений.

Разумеется, если в данной системе неравенств имеется подсистема, для которой сразу можно указать фундаментальный набор решений, то в качестве исходного пункта следует взять эту подсистему; присоединяя к ней последовательно остальные неравенства, мы после ряда шагов построим искомый фундаментальный набор.

Пример. Для системы

$$\left.\begin{aligned} L_1(X) &= -3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6x_4 \geqslant 0, \\ L_2(X) &= \quad 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

требуется найти все неотрицательные решения, т. е. все решения, удовлетворяющие условиям

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\geqslant 0, \\ x_2 &\geqslant 0, \\ x_3 &\geqslant 0, \\ x_4 &\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Иначе говоря, нужно найти общее решение системы (19), (20).

Нетрудно видеть, что для системы (20) фундаментальным набором будет являться набор из точек

$$X_1 = (1, 0, 0, 0), \quad X_2 = (0, 1, 0, 0),$$
$$X_3 = (0, 0, 1, 0), \quad X_4 = (0, 0, 0, 1)$$

(действительно, любое решение $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ системы (20) представимо в виде $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4$). Присоединим к системе (20) первое из неравенств (19) и для полученной таким образом системы построим фундаментальный набор решений, используя теорему п. 5°. Для удобства вычислений составим такую таблицу:

					$L_1(X)$
X_1	1	0	0	0	−3
X_2	0	1	0	0	−4
X_3	0	0	1	0	5
X_4	0	0	0	1	−6

В каждой строке таблицы указана одна из фундаментальных точек для системы (20), а также значение функции $L_1(X)$ для этой точки. Из таблицы видно, что единственной точкой типа X_α^+ является X_3, точки типа X_β^- суть X_1, X_2, X_4, а точек типа X_γ^0 в данном случае нет.

Находим точки типа $X_{\alpha\beta}^0$. Ими будут:

$$X_{31}^0 = 3X_3 + 5X_1 = (5, 0, 3, 0),$$
$$X_{32}^0 = 4X_3 + 5X_2 = (0, 5, 4, 0),$$
$$X_{34}^0 = 6X_3 + 5X_4 = (0, 0, 6, 5).$$

Чтобы не усложнять дальнейших записей, обозначим эти точки Y_1, Y_2, Y_4 (соответственно), а вместо X_3 будем писать Y_3.

Точки Y_3, Y_1, Y_2, Y_4 образуют фундаментальный набор решений для системы, состоящей из (20) и первого из неравенств (19).

Присоединяем к этой системе второе из неравенств (19) и составляем следующую таблицу:

					$L_2(Y)$
Y_3	0	0	1	0	−3
Y_1	5	0	3	0	1
Y_2	0	5	4	0	3
Y_4	0	0	6	5	−13

Из таблицы видно, что роль точек Y_α^+ теперь играют Y_1, Y_2, роль точек Y_β^- играют Y_3, Y_4, а точек типа Y_γ^0 нет.

Находим точки типа $Y_{\alpha\beta}^0$:

$$Y_{13}^0 = 3Y_1 + Y_3 = (15, 0, 10, 0) = 5(3, 0, 2, 0),$$

$$Y_{23}^0 = 3Y_2 + 3Y_3 = (0, 15, 15, 0) = 5(0, 3, 3, 0),$$

$$Y_{14}^0 = 13Y_1 + Y_4 = (65, 0, 45, 5) = 5(13, 0, 9, 1),$$

$$Y_{24}^0 = 13Y_2 + 3Y_4 = (0, 65, 70, 15) = 5(0, 13, 14, 3)$$

Точки Y_1, Y_2, Y_{13}^0, Y_{23}^0, Y_{14}^0, Y_{24}^0 образуют фундаментальный набор решений для системы (19), (20). Общее решение имеет вид

$$X = aY_1 + bY_2 + cY_{13}^0 + dY_{23}^0 + eY_{14}^0 + fY_{24}^0 =$$
$$= a(5, 0, 3, 0) + b(0, 5, 4, 0) + 5c(3, 0, 2, 0) +$$
$$+ 5d(0, 3, 3, 0) + 5e(13, 0, 9, 1) + 5f(0, 13, 14, 3),$$

где a, b, c, d, e, f — какие угодно неотрицательные числа.

Если положить $a = k_1$, $b = k_2$, $5c = k_3$, $5d = k_4$, $5e = k_5$, $5f = k_6$, то получим для X представление

$$X = k_1(5, 0, 3, 0) + k_2(0, 5, 4, 0) + k_3(3, 0, 2, 0) +$$
$$+ k_4(0, 3, 3, 0) + k_5(13, 0, 9, 1) + k_6(0, 13, 14, 3), \quad (21)$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_6$ — произвольные неотрицательные числа.

В заключение этого пункта отметим, что, доказав существование фундаментального набора решений для любой однородной системы линейных неравенств, мы тем самым доказали теорему 2′ из § 7 о строении любого выпуклого многогранного конуса (см. стр. 57).

§ 11. РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

Теперь, когда мы научились строить общее решение однородной системы неравенств, не составляет труда решить аналогичную задачу для произвольной, т. е. неоднородной, системы неравенств.

Пусть

$$\left.\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n &\geqslant a, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n &\geqslant b, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n &\geqslant c \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

— произвольная система линейных неравенств с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Рассмотрим наряду с ней однородную систему

$$\left.\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n - at &\geqslant 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n - bt &\geqslant 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - ct &\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

с $n + 1$ неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$.

Между решениями систем (1) и (2) имеется определенного рода связь. А именно, если $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$ — какое-либо решение системы (2), причем $t > 0$, то числа

$$\tilde{x}_1 = \frac{x_1}{t}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{x_2}{t}, \quad \ldots, \quad \tilde{x}_n = \frac{x_n}{t} \qquad (3)$$

будут составлять решение системы (1).

В самом деле, рассмотрим, например, первое из неравенств (2). Оно выполняется для чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$, т. е.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geqslant at.$$

Разделив обе части неравенства на положительное число t, будем иметь

$$a_1\tilde{x}_1 + a_2\tilde{x}_2 + \ldots + a_n\tilde{x}_n \geqslant a,$$

но это означает, что набор чисел $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$ удовлетворяет первому из неравенств (1). Аналогичное рассуждение можно провести для любого из неравенств (2), откуда и следует наше утверждение.

Нетрудно видеть, что любое решение системы (1) может быть получено указанным выше способом. Действительно, если $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$ — какое-либо решение системы (1), то числа $x_1 = \tilde{x}_1, x_2 = \tilde{x}_2, \ldots, x_n = \tilde{x}_n$, $t = 1$ удовлетворяют системе (2), и при этом справедливы равенства (3).

Итак, чтобы отыскать все решения $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$ системы (1), следует найти все решения системы (2), для которых $t > 0$, и преобразовать каждое из них по формулам (3).

Пример. Пусть требуется найти все решения системы

$$\left.\begin{aligned} -3x_1 - 4x_2 + 5x_3 &\geqslant 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &\geqslant -1, \\ x_1 &\geqslant 0, \\ x_2 &\geqslant 0, \\ x_3 &\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Поступая, как указано выше, запишем вспомогательную однородную систему

$$\left.\begin{aligned} -3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6t &\geqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + t &\geqslant 0, \\ x_1 &\geqslant 0, \\ x_2 &\geqslant 0, \\ x_3 &\geqslant 0. \end{aligned}\right\}$$

Добавляя к этой системе неравенство $t \geqslant 0$ (ибо нас интересуют только такие решения, для которых $t > 0$), получаем систему (19), (20) из § 10, с той лишь разницей, что вместо x_4 написано t. Множество решений этой системы, как показано в § 10 (см. (21) в § 10), описывается формулами

$$\begin{aligned} x_1 &= 5k_1 + 3k_3 + 13k_5, \\ x_2 &= 5k_2 + 3k_4 + 13k_6, \\ x_3 &= 3k_1 + 4k_2 + 2k_3 + 3k_4 + 9k_5 + 14k_6, \\ t &= k_5 + 3k_6, \end{aligned}$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_6$ — любые неотрицательные числа. Так как нас интересуют лишь решения, для которых $t > 0$, то следует считать, что хотя бы одно из чисел k_5, k_6 отлично от нуля (строго положительно). Теперь находим общее решение системы (4) по формулам

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{5k_1 + 3k_3 + 13k_5}{k_5 + 3k_6}, \\ x_2 &= \frac{5k_2 + 3k_4 + 13k_6}{k_5 + 3k_6}, \\ x_3 &= \frac{3k_1 + 4k_2 + 2k_3 + 3k_4 + 9k_5 + 14k_6}{k_5 + 3k_6}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Еще раз подчеркнем, что в этих формулах $k_1, k_2, \ldots, k_6$ — любые неотрицательные числа, причем хотя бы одно из чисел k_5, k_6 отлично от нуля.

Установив, что решение системы (1) указанным выше способом сводится к решению однородной системы (2), мы фактически доказали теорему 3 из § 7 о строении любой выпуклой многогранной области. Проиллюстрируем это на примере системы (4). Положим

$$k_i' = \frac{k_i}{k_5 + 3k_6} \qquad (i = 1, 2, 3, 4);$$

так как числа k_1, k_2, k_3, k_4 — произвольные неотрицательные, то и числа k_1', k_2', k_3', k_4' произвольные неотрицательные. Далее положим

$$k_5' = \frac{k_5}{k_5 + 3k_6}, \quad k_6' = \frac{3k_6}{k_5 + 3k_6};$$

числа k_5' и k_6' неотрицательны и связаны условием $k_5' + k_6' = 1$. Теперь формулы (5) можно записать в виде одного равенства

$$(x_1, x_2, x_3) = k_1'(5, 0, 3) + k_2'(0, 5, 4) + k_3'(3, 0, 2) +$$
$$+ k_4'(0, 3, 3) + k_5'(13, 0, 9) + k_6'\left(0, \frac{13}{3}, \frac{14}{3}\right). \qquad (6)$$

Введем обозначения:

$$X_1 = (5, 0, 3), \quad X_2 = (0, 5, 4), \quad X_3 = (3, 0, 2),$$
$$X_4 = (0, 3, 3), \quad X_5 = (13, 0, 9), \quad X_6 = \left(0, \frac{13}{3}, \frac{14}{3}\right).$$

Принимая во внимание указанные выше ограничения на k_1', k_2', k_3', k_4', а также на k_5', k_6', равенство (6) можно истолковать теперь следующим образом: множество решений системы (4) есть $(X_1, X_2, X_3, X_4) + \langle X_5, X_6\rangle$. Тем самым утверждение теоремы 3 § 7 доказано для системы (4).

§ 12. ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Линейное программирование — сравнительно новая область прикладной математики, развившаяся в 40-х — 50-х годах нашего столетия в связи с решением разнообразных экономических задач.

Как правило, задачи, с которыми мы встречаемся в экономике, и особенно в сфере планирования производства, — это задачи на отыскание *наиболее выгодного варианта.* В каждой из них требуется ответить на вопрос: как распорядиться предоставленными нам ограниченными ресурсами, чтобы добиться наибольшего эффекта. До недавнего времени единственным методом решения подобных задач была обыкновенная прикидка, решение «на глаз»; или же путем перебора всех возможных вариантов находился лучший. Сейчас положение меняется. В последние десятилетия сложность производства возросла в такой степени, что простой перебор вариантов стал невозможен. Факторов, влияющих на решение, оказалось так много, что количество вариантов стало исчисляться в ряде случаев миллиардами. В связи с этим резко возрос интерес к математическим методам в экономике. Процессу «математизации экономики» способствовало также развитие вычислительной техники, в частности, появление электронных вычислительных машин.

Рассмотрим некоторые примеры задач линейного программирования.

Пример 1. На предприятии, выпускающем изделия двух типов, производственная мощность цеха сборки составляет 100 изделий первого или 300 изделий второго типа в сутки; в то же время отдел технического контроля в состоянии проверить не более 150 изделий (любого типа) в сутки. Известно далее, что изделие первого типа стоит вдвое дороже, чем изделие второго типа. Требуется при этих условиях найти такой план выпуска продукции (столько-то изделий первого типа и столько-то второго в сутки), который обеспечивал бы предприятию наибольшую прибыль.

Искомый план выпуска продукции задается с помощью двух неотрицательных целых чисел x, y (x —

количество изделий первого типа, y — второго), которые должны удовлетворять следующим условиям *):

$3x + y \leqslant 300$; $x + y \leqslant 150$;
$2x + y$ максимально.

Другими словами, среди неотрицательных целочисленных решений системы

$$\left.\begin{aligned} 3x + y &\leqslant 300, \\ x + y &\leqslant 150 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

нужно выбрать такое, которое сообщает наибольшее значение линейной функции

$$f = 2x + y.$$

Если на плоскости ввести прямоугольную систему координат xOy, то множество решений системы (1) изобразится с помощью заштрихованного многоугольника на рис. 47. Из того же рисунка можно уяснить, что решением задачи является точка P (75, 75) — одна из вершин многоугольника.

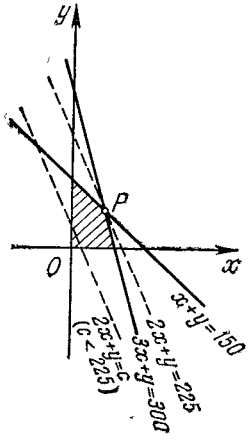

Рис. 47.

Действительно, рассмотрим прямую $2x + y = c$, где c — некоторое число. Обозначим эту прямую l_c. С ростом числа c прямая l_c смещается «вверх» (и притом оставаясь параллельной своему исходному положению). Самым большим значением c, при котором прямая l_c еще имеет общие точки с заштрихованным многоугольником, является то значение c, при котором эта прямая проходит через точку P. Следовательно, в этой точке функция $2x + y$ достигает своего наибольшего значения (по сравнению с ее значениями в остальных точках многоугольника).

Разобранный нами пример, конечно, очень примитивен, но все же он дает некоторое представление о характере задач линейного программирования. В каждой из них

*) Первое условие исходит от цеха сборки. Действительно, вместо одного изделия первого типа цех может выпустить три изделия второго типа. Следовательно, вся продукция цеха в пересчете на изделия второго типа составляет $3x + y$ штук; это число не должно превосходить 300.

требуется найти максимальное (или минимальное) значение некоторой линейной функции n переменных

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$

при условии, что эти переменные подчинены заданной системе линейных неравенств (в число которых входят обязательно условия неотрицательности переменных: $x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$). В некоторых задачах (как, например, в приведенном выше примере) на переменные накладывается дополнительно условие целочисленности.

Пример 2 (*задача о диете*). Из имеющихся в распоряжении видов пищи нужно составить такую диету, которая, с одной стороны, обеспечивала бы удовлетворение минимальных потребностей организма в питательных веществах (белках, жирах, углеводах, витаминах и т. д.) и вместе с тем требовала бы наименьших затрат.

Рассмотрим простую математическую модель этой задачи.

Пусть имеются два вида продуктов, $П_1$ и $П_2$, содержащих питательные вещества A, B, C. Известно, сколько питательного вещества того или иного вида содержится в 1 кг пищи $П_1$ или $П_2$; эти сведения указаны в таблице

	A	B	C
в 1 кг $П_1$	a_1	b_1	c_1
в 1 кг $П_2$	a_2	b_2	c_2

Кроме этих данных, нам известны: a, b, c — ежесуточные потребности организма в A, B, C (соответственно) и s_1, s_2 — стоимости 1 кг пищи $П_1$, $П_2$ (соответственно). Требуется рассчитать количество x_1 продукта $П_1$ и количество x_2 продукта $П_2$ так, чтобы обеспечить необходимое количество питательных веществ при минимальных затратах на пищу.

Очевидно, общая стоимость пищи будет

$$S = s_1x_1 + s_2x_2.$$

Общее количество вещества A в обоих видах пищи равно $a_1x_1 + a_2x_2$. Оно должно быть не меньше a:

$$a_1x_1 + a_2x_2 \geqslant a.$$

Аналогичные неравенства должны выполняться для B и C: $b_1x_1 + b_2x_2 \geqslant b$, $c_1x_1 + c_2x_2 \geqslant c$. Таким образом, приходим к следующей задаче.

Дана система

$$\left.\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 &\geqslant a, \\ b_1x_1 + b_2x_2 &\geqslant b, \\ c_1x_1 + c_2x_2 &\geqslant c \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

трех линейных неравенств с двумя неизвестными x_1, x_2 и линейная функция

$$S = s_1x_1 + s_2x_2.$$

Требуется среди неотрицательных решений (x_1, x_2) системы (2) выбрать такое, при котором функция S достигает наименьшего значения (минимизируется). К подобным схемам могут быть сведены различные задачи о составлении сплавов, смесей горючего, задачи об определении состава животноводческих кормовых смесей наименьшей стоимости, о составлении смеси химических удобрений и т. д.

Пример 3 (*транспортная задача*). Уголь, добываемый в нескольких месторождениях, отправляется ряду потребителей: заводам, электростанциям и т. п. Известно, сколько угля добывается в каждом из месторождений, скажем, за месяц, и сколько его требуется на тот же срок любому из потребителей. Известны расстояния между месторождениями и потребителями, а также условия сообщения между ними; учитывая эти данные, можно подсчитать, во что обходится перевозка каждой тонны угля из любого месторождения в любой пункт потребления. Требуется при этих условиях спланировать перевозки угля таким образом, чтобы затраты на них были минимальными.

Примем, для простоты, что имеются лишь два месторождения M_1, M_2 и три потребителя $П_1$, $П_2$, $П_3$. Количества угля в M_1 и M_2 равны соответственно a_1 и a_2; потребности пунктов $П_1$, $П_2$, $П_3$ пусть будут соответственно b_1, b_2, b_3. Будем считать, что суммарные

запасы равны суммарным потребностям:

$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + b_3$$

— такое предположение вполне естественно. Наконец, заданы числа c_{ij} ($i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$) — стоимости перевозки тонны угля из M_i в $П_j$. Задача состоит в нахождении шести чисел

$$x_{11}, \quad x_{12}, \quad x_{13}, \quad x_{21}, \quad x_{22}, \quad x_{23},$$

где x_{ij} — количество угля, предназначенное к отправке из M_i в $П_j$.

Для удобства обозрения составим такую таблицу:

	в $П_1$	в $П_2$	в $П_3$	Всего отправлено
Из M_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	a_1
Из M_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	a_2
Всего привезено	b_1	b_2	b_3	

Общее количество угля, вывезенное из M_1, должно равняться a_1; отсюда имеем условие

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1.$$

Аналогичное условие должно выполняться для M_2:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2.$$

Общее количество угля, привезенное в $П_1$, должно равняться b_1; отсюда

$$x_{11} + x_{21} = b_1.$$

Аналогично получаем условия:

$$x_{12} + x_{22} = b_2, \qquad x_{13} + x_{23} = b_3.$$

Предполагаем, что стоимость перевозки прямо пропорциональна количеству перевозимого угля, т. е. перевозка из M_i в $П_j$ стоит $c_{ij}x_{ij}$. Тогда общая стоимость всех перевозок будет

$$S = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23}.$$

Таким образом, приходим к следующей задаче. Дана система

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= a_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= a_2, \\ x_{11} + x_{21} &= b_1, \\ x_{12} + x_{22} &= b_2, \\ x_{13} + x_{23} &= b_3 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

пяти линейных уравнений с шестью неизвестными и линейная функция S. Требуется среди неотрицательных решений

$$x_{11},\quad x_{12},\quad x_{13},\quad x_{21},\quad x_{22},\quad x_{23}$$

системы (3) выбрать такое, при котором функция S достигает наименьшего значения (минимизируется).

Поставленная задача может быть, конечно, сформулирована и в более общем виде, т. е. с любым числом месторождений и потребителей. Она получила название *транспортной задачи* и явилась одной из первых проблем, для решения которых были с успехом применены методы линейного программирования.

Мы рассмотрели в упрощенном виде три задачи линейного программирования. При всем разнообразии их сюжетов в постановке задач имеется много общего. В каждой задаче ищутся значения нескольких неизвестных, причем требуется, чтобы:

а) эти значения были неотрицательны;

б) эти значения удовлетворяли некоторой системе линейных уравнений или линейных неравенств;

в) при этих значениях некоторая линейная функция обращалась в минимум (или максимум).

Заметим, что роль условия б) кажется скорее разделяющей, нежели объединяющей: ведь в одном случае неизвестные должны удовлетворять уравнениям, а в другом случае — неравенствам. Но позже мы увидим, что один случай легко сводится к другому.

Задачами такого рода и занимается линейное программирование. Говоря точнее, *линейное программирование — это математическая дисциплина, изучающая методы нахождения наименьшего (или наибольшего) значения линейной функции нескольких пере-*

менных, при условии, что последние удовлетворяют конечному числу линейных уравнений и неравенств. Число переменных и число условий (уравнений, неравенств) могут быть, разумеется, какими угодно. В реальных задачах эти числа весьма велики (порядка одного или нескольких десятков, а иногда и больше).

Запишем сказанное на точном языке формул. Общая математическая формулировка задачи линейного программирования выглядит следующим образом.

Дана система линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots\ + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \ldots\ + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \ldots\ + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

и линейная функция

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ \ldots\ + c_nx_n. \qquad \text{(II)}$$

Требуется найти такое неотрицательное решение

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_n \geqslant 0 \qquad \text{(III)}$$

системы (I), *при котором функция* f *принимает наименьшее значение* (*минимизируется*).

Уравнения (I) называются *ограничениями* данной задачи. Строго говоря, условия (III) тоже являются ограничениями, однако их не принято так называть, поскольку они не характерны для *данной* задачи, а являются общими для всех задач линейного программирования.

Из трех рассмотренных выше примеров, казалось бы, только последний (транспортная задача) подходит под только что данную формулировку. Остальные два выглядят несколько иначе, поскольку все входящие в них ограничения имеют вид неравенств, а не уравнений. Однако от ограничений-неравенств с помощью простого приема можно перейти к эквивалентным ограничениям, заданным в форме уравнений.

В самом деле, предположим, что среди ограничений данной задачи имеется неравенство

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ \ldots\ + a_nx_n + b \geqslant 0. \qquad (4)$$

Введем новое, так называемое *добавочное* неизвестное x_{n+1}, связанное с неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$

уравнением

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b = x_{n+1}.$$

Очевидно, неравенство (4) равносильно условию неотрицательности x_{n+1}. Если для каждого из неравенств, входящих в систему ограничений данной задачи, ввести свое добавочное неизвестное, потребовав дополнительно, чтобы все добавочные неизвестные были неотрицательны, то задача примет стандартную форму (I), (II), (III), хотя и с бóльшим числом неизвестных. Продемонстрируем этот прием на примере задачи о диете. Система ограничений в этой задаче состоит из трех неравенств, поэтому вводим три добавочных неизвестных x_3, x_4, x_5. В результате ограничения принимают вид уравнений:

$$\left.\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 - x_3 &= a, \\ b_1x_1 + b_2x_2 - x_4 &= b, \\ c_1x_1 + c_2x_2 - x_5 &= c. \end{aligned}\right\}$$

Требуется среди всех неотрицательных решений этой системы найти такое, которое минимизирует функцию

$$S = s_1x_1 + s_2x_2.$$

По существу, конечно, нас интересуют в искомом решении только значения x_1 и x_2.

Часто в задаче линейного программирования требуется разыскать не минимум, а максимум линейной функции f. Так как $\max f = -\min(-f)$ (докажите это), то одна задача сводится к другой заменой f на $-f$.

Мы показали, что задача линейного программирования с ограничениями-неравенствами сводится к задаче с ограничениями-уравнениями. Весьма интересно, что возможно и обратное сведéние, т. е. любую задачу линейного программирования можно сформулировать так, что все ограничения будут иметь вид неравенств. Останавливаться на этом мы не будем.

Сделаем в заключение несколько замечаний относительно принятой терминологии. Любое неотрицательное решение системы ограничений называется *допустимым*. Допустимое решение, дающее минимум функции f, называется *оптимальным*. Отыскание оптимального решения и является как раз нашей целью. Оптимальное решение (если оно существует) не обязательно единственно: возможны случаи, когда имеется бесчисленное множество оптимальных решений.

§ 13. СИМПЛЕКС-МЕТОД

Реальные задачи линейного программирования содержат, как правило, большое число ограничений и неизвестных. Естественно, что решение таких задач связано с большим объемом вычислений. Это затруднение преодолевается с помощью быстродействующих вычислительных машин. Алгоритм, лежащий в основе машинной программы, может быть связан со спецификой данного класса задач. Так, например, для решения транспортной задачи имеются весьма простые алгоритмы, обусловленные особенностями ее системы ограничений. Однако существуют и общие методы, позволяющие найти решение любой задачи линейного программирования в обозримое число шагов. К их числу относится прежде всего так называемый *симплекс-метод* и некоторые его модификации *).

1°. *Описание симплекс-метода.* Итак, рассмотрим задачу линейного программирования. Дана некоторая система линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и некоторая линейная функция f. Требуется среди неотрицательных решений данной системы найти такое, которое минимизирует функцию f.

Для начала работы по симплекс-методу требуется, чтобы заданная система уравнений была приведена к такому виду, в котором какие-то r неизвестных выражены через остальные, причем *свободные члены этих выражений неотрицательны.* Предположим, например, что $n = 5$ и неизвестные, которые выражены через остальные, — это x_1, x_2, x_3. Следовательно, система ограничений приведена к виду

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha + \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5, \\ x_2 &= \beta + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5, \\ x_3 &= \gamma + \gamma_4 x_4 + \gamma_5 x_5, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где

$$\alpha \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0, \quad \gamma \geqslant 0. \qquad (2)$$

Можно ли на самом деле привести систему к такому виду и как это сделать — этот вопрос мы рассмотрим позже (см. п. 2°). Неизвестные x_1, x_2, x_3, находящиеся в левых частях системы (1), называются *базисными*,

*) Название «симплекс-метод» не связано с существом дела, а объясняется случайным обстоятельством.

а весь набор $\{x_1, x_2, x_3\}$, который мы обозначим для краткости одной буквой $Б$, — *базисом*; остальные неизвестные называются *небазисными* или *свободными* *). Подставляя в первоначальное выражение для функции f вместо базисных неизвестных их выражения через небазисные из (1), мы можем и саму функцию f также записать через небазисные неизвестные x_4, x_5:

$$f = c + c_4x_4 + c_5x_5.$$

Положим все небазисные неизвестные равными нулю:

$$x_4 = 0, \quad x_5 = 0,$$

и найдем из системы (1) значения базисных неизвестных:

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 = \gamma.$$

Полученное таким путем решение системы

$$(\alpha, \beta, \gamma, 0, 0)$$

будет, вследствие (2), допустимым. Оно называется *базисным* решением, отвечающим базису $Б = \{x_1, x_2, x_3\}$. Для базисного решения значение функции f равно

$$f_Б = c.$$

Решение задачи линейного программирования при помощи симплекс-метода распадается на ряд шагов. Каждый шаг заключается в том, что от данного базиса $Б$ мы переходим к другому базису $Б'$ с таким расчетом, чтобы значение f уменьшилось или, по крайней мере, не увеличилось: $f_{Б'} \leqslant f_Б$. Новый базис $Б'$ получается из старого $Б$ весьма просто: из $Б$ удаляется одно из неизвестных и взамен него вводится другое (из числа прежних небазисных). Разумеется, изменение базиса влечет за собой соответствующую перестройку системы (1). После некоторого числа k таких шагов мы или приходим к базису $Б^{(k)}$, для которого $f_{Б^{(k)}}$ есть искомый минимум функции f, а соответствующее базисное решение является оптимальным, или же выясняем, что задача решения не имеет.

*) Последнее название связано с тем, что при нахождении всех решений системы (1) (безотносительно к задаче линейного программирования) этим неизвестным можно придавать любые значения.

Проиллюстрируем симплекс-метод на примерах.

Пример 1. Пусть заданная система ограничений и функция f приведены к такому виду:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 - x_4 + 2x_5, \\ x_2 &= 2 + 2x_4 - x_5, \\ x_3 &= 3 - 3x_4 - x_5; \end{aligned}\right\}$$
$$f = x_4 - x_5.$$

Здесь неизвестные x_1, x_2, x_3 образуют базис. Соответствующее базисное решение есть

$$(1, 2, 3, 0, 0);$$

значение f для этого решения равно 0.

Посмотрим, не является ли это решение оптимальным. Поскольку x_5 входит в f с отрицательным коэффициентом, мы можем попытаться уменьшить значение f, увеличив x_5 (и сохранив нулевое значение для x_4). Однако делать это следует осторожно, поскольку при изменении x_5 будут меняться значения x_1, x_2, x_3, и нужно следить за тем, чтобы ни одно из них не стало отрицательным.

Так как увеличение x_5 приводит к увеличению x_1, то для x_1 такой опасности не существует. Рассматривая x_2 и x_3, находим, что x_5 может быть увеличено до 2 (и не более, иначе x_2 станет отрицательным), что дает $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. В итоге получаем новое допустимое решение (5, 0, 1, 0, 2), в котором число положительных неизвестных по-прежнему равно трем. Значение f для этого решения равно —2.

Новый базис теперь состоит из x_1, x_5, x_3. Чтобы осуществить соответствующую перестройку системы ограничений, нужно выразить эти неизвестные через x_2, x_4. Начинаем с уравнения для x_2 (нового небазисного неизвестного), из которого выражаем x_5 (новое базисное неизвестное):

$$x_5 = 2 + 2x_4 - x_2;$$

затем выражаем x_1, x_3 и f:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - x_4 + 2(2 + 2x_4 - x_2), \\ x_3 &= 3 - 3x_4 - (2 + 2x_4 - x_2), \\ f &= x_4 - (2 + 2x_4 - x_2). \end{aligned}$$

Итак, задача приведена к виду

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 5 + 3x_4 - 2x_2, \\ x_5 &= 2 + 2x_4 - x_2, \\ x_3 &= 1 - 5x_4 + x_2, \end{aligned}\right\}$$
$$f = -2 - x_4 + x_2.$$

Новое базисное решение есть

$$(5,\ 0,\ 1,\ 0,\ 2);$$

значение f для этого решения равно —2. На этом заканчивается первый шаг процесса.

Выясним, нельзя ли еще уменьшить значение f. Коэффициент при x_4 в выражении для f отрицателен, поэтому можно попытаться уменьшить f, увеличив x_4 (без изменения $x_2 = 0$). Первое и второе уравнения этому нисколько не препятствуют, а из третьего уравнения видно, что x_4 можно увеличить до $\frac{1}{5}$ (и не более, иначе x_3 станет отрицательным). Полагая $x_4 = \frac{1}{5}$, $x_2 = 0$, получим $x_1 = \frac{28}{5}$, $x_5 = \frac{12}{5}$, $x_3 = 0$. В итоге имеем новое допустимое решение $\left(\frac{28}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{5},\ \frac{12}{5}\right)$.

Новый базис теперь состоит из x_1, x_5, x_4. Из уравнения для x_3 (нового небазисного неизвестного) выражаем x_4 (новое базисное неизвестное):

$$x_4 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_2$$

и подставляем это выражение в остальные уравнения. В итоге система принимает вид

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{28}{5} - \frac{3}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_2, \\ x_5 &= \frac{12}{5} - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_2, \\ x_4 &= \frac{1}{5} - \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_2, \end{aligned}\right\}$$

а для функции f получается выражение

$$f = -\frac{11}{5} + \frac{1}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_2.$$

Новое базисное решение есть

$$\left(\frac{28}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{5},\ \frac{12}{5}\right),$$

соответствующее ему значение f равно $-\frac{11}{5}$. На этом заканчивается второй шаг процесса.

Так как в последнюю запись функции f оба неизвестных x_3 и x_2 входят с положительными коэффициентами, минимум f достигается при $x_3 = x_2 = 0$. Это означает, что последнее базисное решение $\left(\frac{28}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{5},\ \frac{12}{5}\right)$ является оптимальным и искомый минимум f равен $-\frac{11}{5}$; задача решена.

В разобранном примере процесс закончился нахождением оптимального решения. Однако имеется еще одна возможность окончания процесса. Чтобы ее проиллюстрировать, решим следующий пример.

Пример 2.

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 1 + x_1 - x_2, \\ x_4 &= 2 - x_1 + 2x_2; \end{aligned}\right\}$$
$$f = -x_1 - x_2.$$

Здесь базис образован неизвестными x_3, x_4. Базисное решение имеет вид

$$(0,\ 0,\ 1,\ 2),$$

соответствующее значение функции f равно 0.

Коэффициент при x_1 в выражении для f отрицателен, поэтому пытаемся увеличить x_1 (не меняя $x_2 = 0$). Первое уравнение этому не препятствует, из второго же уравнения видно, что x_1 можно увеличить только до 2, что дает $x_3 = 3$, $x_4 = 0$. Новое допустимое решение есть (2, 0, 3, 0); значение f для этого решения равно —2.

Новый базис теперь состоит из x_3, x_1. Выражаем из второго уравнения x_1 и подставляем это выражение в первое уравнение, а также в f. Задача принимает вид

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 3 - x_4 + x_2, \\ x_1 &= 2 - x_4 + 2x_2; \end{aligned}\right\}$$
$$f = -2 + x_4 - 3x_2.$$

Новое базисное решение есть

$$(2, 0, 3, 0),$$

а соответствующее ему значение f равно -2.

В последнем выражении для f коэффициент при x_2 отрицателен. Посмотрим, насколько можно уменьшить значение f путем увеличения x_2 (при сохранении $x_4 = 0$). С этой целью просматриваем члены с x_2 в обоих уравнениях системы и замечаем, что оба коэффициента при x_2 положительны. Таким образом, x_2 можно увеличивать неограниченно, не нарушая положительности x_3 и x_1. При этом f будет принимать отрицательные значения, как угодно большие по абсолютной величине. Итак, $\min f = -\infty$ (как говорят, функция f не ограничена снизу), и оптимального решения не существует.

Как видно из приведенных примеров, в основе очередного шага симплекс-метода лежит выбор отрицательного коэффициента при некотором небазисном неизвестном x_j в выражении для f. Если таких коэффициентов оказывается не один, а несколько, то можно выбрать любой из них. Это обстоятельство вносит в расчеты некоторый элемент произвола. Однако и на этом произвол не обязательно кончается: может случиться, что при увеличении x_j до крайнего предела сразу несколько базисных неизвестных обращаются в нуль. Тогда любое из них x_i можно поменять ролями с x_j, т. е. сделать x_i небазисным, а x_j, наоборот, ввести в базис.

Разумеется, можно было бы устранить произвол, введя какое-нибудь дополнительное соглашение. Однако особой необходимости в этом нет. На самом деле некоторый произвол даже полезен, так как он позволяет варьировать процесс вычислений и, значит, искать такую последовательность шагов, которая возможно быстрее ведет к решению задачи.

2°. *Отыскание первого базиса.* В предыдущем пункте была описана процедура решения задачи линейного программирования симплекс-методом. В качестве предварительного условия мы требовали, чтобы система ограничений была приведена к виду *)

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha + \alpha_{r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_n x_n, \\ x_2 &= \beta + \beta_{r+1}x_{r+1} + \ldots + \beta_n x_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r &= \gamma + \gamma_{r+1}x_{r+1} + \ldots + \gamma_n x_n, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

*) Или к аналогичному виду, когда слева стоят не $x_1, x_2, \ldots, x_r$, а другие r неизвестных; остальные $n - r$ неизвестных должны входить в правые части.

где $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, ..., $\gamma \geqslant 0$; тогда мы говорим, что неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ образуют базис.

Во многих задачах линейного программирования базис усматривается непосредственно. В других случаях его приходится искать. Рассмотрим один из методов нахождения базиса, называемый обычно «методом искусственного базиса».

Для иллюстрации метода разберем пример.

Пример. Дана система ограничений

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 - 7x_5 &= -4, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 5. \end{aligned}\right\}$$

Требуется разрешить ее относительно некоторого исходного базиса.

Прежде всего преобразуем данную систему так, чтобы свободные члены уравнений стали неотрицательными. Для этого следует умножить обе части первого уравнения на —1. Получим систему

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 7x_5 &= 4, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 5. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Введем теперь вспомогательные, или *искусственные*, неизвестные y_1, y_2 (по одному на каждое уравнение) следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 4 - (-2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 7x_5), \\ y_2 &= 5 - (-x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5). \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Очевидно, все решения исходной системы (4) можно получить, взяв решения системы (5), удовлетворяющие условиям $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, и оставив от каждого из этих решений лишь значения $x_1, \ldots, x_5$.

В системе (5) неизвестные y_1, y_2 образуют базис. Предположим, что нам удастся, отправляясь от этого базиса, перейти к другому базису, не содержащему ни одного искусственного неизвестного. Тогда, опуская в полученных уравнениях члены с y_1 и y_2 (или, что то же, полагая $y_1 = 0$, $y_2 = 0$), получим систему, равносильную исходной системе (4), причем эта система будет разрешена относительно некоторого базиса.

Остается решить, каким образом в системе (5) неизвестные y_1, y_2 можно перевести в небазисные. Замечательно, что для этой цели мы можем опять-таки применить симплекс-метод. А именно, будем решать при помощи этого метода задачу о минимизации

функции

$$F = y_1 + y_2$$

при ограничениях (5), а также при условиях $x_1 \geqslant 0, \ldots, x_5 \geqslant 0, y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0$. Предпосылки, при которых начинает действовать симплекс-метод, здесь выполнены, так как система (5) имеет требуемый вид (выделен исходный базис y_1, y_2). После некоторого числа шагов будет получен искомый минимум. Так как $F \geqslant 0$, то и $\min F \geqslant 0$, поэтому возможны два случая:

1. $\min F > 0$. Это означает, что система (5) не имеет неотрицательных решений, для которых $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ (в противном случае $\min F = 0$). Следовательно, *в этом случае исходная система* (4) *не будет иметь неотрицательных решений.* Отсюда будет следовать, что любая задача линейного программирования с такой системой ограничений неразрешима.

2. $\min F = 0$. Пусть в этом случае $(x_1^0, \ldots, x_5^0, y_1^0, y_2^0)$ — оптимальное решение. Поскольку $y_1^0 + y_2^0 = \min F = 0$, то $y_1^0 = 0$, $y_2^0 = 0$. Отсюда следует, что $(x_1^0, \ldots, x_5^0)$ будет неотрицательным решением исходной системы (4).

Таким образом, *в случае* $\min F = 0$ *система ограничений* (4) *будет иметь по крайней мере одно неотрицательное решение.*

Далее, если по окончании процесса (т. е. когда уже достигнут $\min F = 0$) окажется, что искусственные неизвестные y_1, y_2 находятся среди небазисных, то мы достигли цели — выделен базис из числа неизвестных $x_1, \ldots, x_5$. Если же выяснится, что какие-то из неизвестных y_1, y_2 еще продолжают входить в базис, то необходимы дальнейшие преобразования.

Итак, решаем задачу минимизации функции

$$F = y_1 + y_2 = [4 - (-2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 7x_5)] + [5 - (-x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5)] = 9 + 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 10x_5.$$

Коэффициент при x_4 в выражении для F отрицателен, поэтому пробуем уменьшить значение F, увеличивая x_4. Сопоставляя коэффициенты при x_4 в уравнениях (5) со свободными членами, находим, что x_4

можно увеличивать только до 4 — тогда y_1 обращается в нуль. Новый базис состоит из x_4, y_2. Разрешаем первое уравнение относительно x_4 и полученное выражение для x_4 подставляем во второе уравнение, а также в F. Задача принимает вид

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= 4 + 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 7x_5 - y_1, \\ y_2 &= 1 - x_1 - x_2 + 4x_5 + y_1; \\ F &= 1 - x_1 - x_2 + 4x_5 + 2y_1. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

На этом заканчивается первый шаг процесса. В результате него неизвестное y_1 удалось сделать небазисным.

Коэффициент при x_1 в новом выражении для F отрицателен. Рассматривая уравнения (6), видим, что x_1 можно увеличивать только до 1, тогда y_2 обращается в нуль. Новый базис состоит из x_4, x_1. Перестраивая уравнения (6) и выражение для F (последнее, впрочем, уже необязательно), получаем

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= 6 - 4x_2 + 2x_3 + x_5 + y_1 - 2y_2, \\ x_1 &= 1 - x_2 + 4x_5 + y_1 - y_2; \\ F &= y_1 + y_2. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Таким образом, в результате второго шага искусственные неизвестные y_1, y_2 стали небазисными. Отбрасывая в уравнениях (7) члены с y_1, y_2, получаем

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= 6 - 4x_2 + 2x_3 + x_5, \\ x_1 &= 1 - x_2 + 4x_5. \end{aligned}\right\}$$

Это означает, что в исходной системе (4) выделен базис. Задача решена.

Как уже отмечалось. при нахождении симплекс-методом минимума функции F, равной сумме искусственных неизвестных, может случиться, что к моменту окончания процесса (т. е. когда уже достигнут $\min F = 0$) часть искусственных неизвестных еще продолжает входить в базис. С помощью простых приемов, которые мы продемонстрируем на примере, можно и эти неизвестные перевести в небазисные.

Пусть, скажем, после некоторого числа шагов задача приобрела вид

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}y_1, \\ y_2 &= x_1 - x_3 + 11x_4 + 5x_5 + 2y_1, \\ y_3 &= 6x_1 + 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 + 2y_1; \\ F &= 7x_1 + 5x_3 + 17x_4 + 9x_5 + 5y_1. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Мы видим, что функция F уже достигла минимума, равного нулю, поэтому из дальнейших рассмотрений ее можно исключить. Неизвестные y_2 и y_3 еще продолжают входить в базис. Однако свободные члены в уравнениях для y_2 и y_3 равны нулю, и это не случайно: ведь $\min F = 0$ означает, что в полученном базисном решении $y_2 = 0$ и $y_3 = 0$. Этим обстоятельством мы сейчас и воспользуемся, чтобы вывести из базиса y_2 и y_3. Для этого заметим, что среди коэффициентов при неизвестных $x_1, \ldots, x_5$ в уравнении для y_2 имеется отрицательное число: это коэффициент -1 при x_3. Произведем замену $x_3 \leftrightarrow y_2$ (неизвестное x_3 сделаем базисным, а y_2 переведем в небазисные). С этой целью второе из уравнений разрешаем относительно x_3 и полученное выражение для x_3 подставляем в остальные уравнения. Так как свободный член второго уравнения равен нулю, то в результате такой операции свободные члены уравнений не изменятся (и, значит, останутся неотрицательными).

Получим:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2} + x_1 + 15x_4 + 7x_5 + \frac{5}{2}y_1 - \frac{3}{2}y_2, \\ x_3 &= \quad x_1 + 11x_4 + 5x_5 + \quad 2y_1 - \quad y_2, \\ y_3 &= 12x_1 + 72x_4 + 34x_5 + 14y_1 - \quad 6y_2. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Теперь уже в уравнении для y_3 нет отрицательных коэффициентов (при $x_1, \ldots, x_5$), поэтому нам не удастся перебросить y_3 в небазисные неизвестные. Однако не следует особенно огорчаться по этому поводу. Ведь если какие-то числа $x_1, \ldots, x_5$ удовлетворяют исходной системе ограничений, то y_1, y_2 и y_3 должны равняться нулю. Значит,

$$12x_1 + 72x_4 + 34x_5 = 0.$$

Так как все коэффициенты при неизвестных здесь имеют один и тот же знак, то отсюда должно следовать:

$$x_1 = x_4 = x_5 = 0$$

— эти равенства являются, таким образом, следствиями исходной системы ограничений и условий $x_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, 5)$. Если считать их выполненными, то от системы (9) остается

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2}, \\ x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Итак, заданная система ограничений при условии неотрицательности неизвестных допускает только одно решение:

$$x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0.$$

§ 14. ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

В различных разделах математики встречаются так называемые *теоремы двойственности*. Каждая из них позволяет для любого утверждения данной теории построить — по определенному стандартному правилу — другое утверждение таким образом, что из справедливости первого автоматически следует справедливость второго. Замечательный пример теоремы двойственности мы встречаем и в линейном программировании.

Пусть дана некоторая задача линейного программирования — будем в дальнейшем называть ее *исходной задачей* или *задачей* А. При этом ограничения заданы в форме *неравенств*. Итак, дана система

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 \geqslant 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 \geqslant 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + b_m \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

m линейных неравенств с n неизвестными и линейная функция

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n.$$

Требуется из всех неотрицательных ($x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, ..., $x_n \geqslant 0$) решений системы (1) выбрать такое, которое сообщает функции f *наибольшее* значение (максимизирует f).

Свяжем с задачей А новую задачу, которую назовем *двойственной* по отношению к задаче А или *задачей* А′. Вот ее формулировка: дана система

$$\left.\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m + c_1 \leqslant 0, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m + c_2 \leqslant 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m + c_n \leqslant 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

n линейных неравенств с m неизвестными и линейная функция

$$\varphi = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m.$$

Требуется из всех неотрицательных решений системы (1′) выбрать такое, которое сообщает функции φ наименьшее возможное значение (*минимизирует* φ). Сравнивая задачи A и A′, мы замечаем, что:

1. Коэффициент при j-м неизвестном в i-м уравнении системы (1′) тот же самый, что и коэффициент при i-м неизвестном в j-м уравнении системы (1).

2. Свободные члены неравенств в каждой из задач совпадают с коэффициентами при неизвестных в линейной функции другой задачи.

3. В системе неравенств задачи A все неравенства типа $\geqslant 0$, причем в этой задаче требуется достичь максимума f. В системе неравенств задачи A′, наоборот, все неравенства типа $\leqslant 0$, но зато в ней требуется достичь минимума φ.

Одна из основных теорем линейного программирования — так называемая теорема двойственности — утверждает следующее.

Теорема двойственности. *Если исходная задача имеет решение, то и двойственная ей также имеет решение. При этом максимум функции* f *равен минимуму функции* φ:

$$\max f = \min \varphi.$$

Мы докажем эту теорему, сведя ее к вопросу о совместности некоторой системы неравенств.

Чтобы было удобнее следить за доказательством, разобьем его на несколько этапов.

Этап 1. Лемма. *Если* $x_1^0, \ldots, x_n^0$ — *какое-либо неотрицательное решение системы* (1), *а* $y_1^0, \ldots, y_m^0$ — *какое-либо неотрицательное решение системы* (1′), *то значения функций* f *и* φ *для этих решений связаны неравенством*

$$f_0 \leqslant \varphi_0.$$

Доказательство. Рассмотрим неравенства системы (1), куда вместо $x_1, \ldots, x_n$ подставлены значения $x_1^0, \ldots, x_n^0$. Умножим первое из этих неравенств на y_1^0, второе — на y_2^0 и т. д. и затем все полученные неравенства сложим:

$$(a_{11}y_1^0x_1^0 + \ldots + a_{mn}y_m^0x_n^0) + b_1y_1^0 + \ldots + b_my_m^0 \geqslant 0$$

(следует учесть, что мы умножаем неравенства на неотрицательные числа, поэтому знаки неравенств не

меняются). Точно так же умножим первое неравенство системы (1′) на x_1^0, второе — на x_2^0 и т. д., а затем сложим:

$$(a_{11}y_1^0x_1^0 + \ldots + a_{mn}y_m^0x_n^0) + c_1x_1^0 + \ldots + c_nx_n^0 \leqslant 0.$$

В обоих случаях в скобках стоит выражение, равное сумме членов вида $a_{ij}y_i^0x_j^0$ по всем $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Следовательно, оба выражения в скобках совпадают. Но тогда

$$c_1x_1^0 + \ldots + c_nx_n^0 \leqslant b_1y_1^0 + \ldots + b_my_m^0$$

или $f_0 \leqslant \varphi_0$. Лемма доказана.

Этап 2. *Сведение задач* A *и* A′ *к решению некоторой системы неравенств.*

Рассмотрим следующую «комбинированную» систему неравенств:

$$\left.\begin{array}{l|l}
a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & + b_1 \geqslant 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & + b_m \geqslant 0, \\
\hline
 & a_{11}y_1 + \ldots + a_{m1}y_m + c_1 \leqslant 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & a_{1n}y_1 + \ldots + a_{mn}y_m + c_n \leqslant 0, \\
\hline
c_1x_1 + \ldots + c_nx_n & -b_1y_1 - \ldots - b_my_m \quad \geqslant 0.
\end{array}\right\} \quad (S)$$

Она, как видно из написанного, составлена из системы (1), системы (1′) и неравенства $f - \varphi \geqslant 0$. Неизвестными в системе (S) являются $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ (всего $n + m$ неизвестных). Установим прежде всего такой факт.

Если система (S) *имеет неотрицательное решение* $x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0$, *то числа* $x_1^0, \ldots, x_n^0$ *дают решение задачи* A, *а числа* $y_1^0, \ldots, y_m^0$ — *решение задачи* A′, *причем* $f_0 = \varphi_0$.

Задержимся немного в этом месте, чтобы подчеркнуть принципиальную роль сформулированного выше предложения. В нем замечательно то, что *задача линейного программирования, т. е. задача о максимизации, сводится к решению некоторой системы линейных неравенств без каких бы то ни было требований максимизации.* На самом деле, конечно, решение системы (S) (в области неотрица-

тельных значений неизвестных) ничуть не легче, чем решение исходной задачи линейного программирования (задачи А); однако самый факт такого сведения очень любопытен.

Итак, докажем выдвинутое выше утверждение. Прежде всего ясно, что числа $x_1^0, \ldots, x_n^0$ неотрицательны и удовлетворяют системе (1); аналогично числа $y_1^0, \ldots, y_m^0$ неотрицательны и удовлетворяют (1′). Кроме того, для этих чисел справедливо неравенство

$$f_0 \geqslant \varphi_0$$

(вытекающее из последнего неравенства системы (*S*)). С другой стороны, по лемме имеем

$$f_0 \leqslant \varphi_0.$$

Следовательно, $f_0 = \varphi_0$.

Далее, если $x_1, \ldots, x_n$ — *какое-нибудь* неотрицательное решение системы (1), то снова по лемме имеем

$$f \leqslant \varphi_0.$$

Сопоставляя это с $f_0 = \varphi_0$, получаем $f \leqslant f_0$, откуда следует, что f_0 есть максимальное значение f.

Аналогично, если $y_1, \ldots, y_m$ — какое-нибудь неотрицательное решение системы (1′), то по лемме имеем

$$f_0 \leqslant \varphi;$$

сопоставляя это с $f_0 = \varphi_0$, получаем $\varphi_0 \leqslant \varphi$, т. е. φ_0 есть минимальное значение φ. Этим доказано сформулированное выше предложение.

Этап 3. *Завершение доказательства.* Нам осталось теперь показать следующее: если задача А имеет решение, то система (*S*) имеет неотрицательное решение. Ибо тогда, как показано выше, $f_0 = \varphi_0$, т. е. $\max f = \min \varphi$.

Будем рассуждать от противного, т. е. предположим, что система (*S*) не имеет неотрицательных решений. Для этого случая у нас имеется следствие из теоремы о несовместных системах (§ 9). Правда, это следствие относится к системе, состоящей из неравенств $\geqslant 0$, а у нас в системе (*S*) имеются неравен-

ства $\leqslant 0$. Но это положение легко исправить, записав систему (S) в виде

$$\left.\begin{array}{l|l|l}
a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & + b_1 \geqslant 0. & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\
a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & + b_m \geqslant 0, & \\
\hline
 & - a_{11}y_1 - \ldots - a_{m1}y_m - c_1 \geqslant 0, & (S') \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\
 & - a_{1n}y_1 - \ldots - a_{mn}y_m - c_n \geqslant 0, & \\
\hline
c_1x_1 + \ldots + c_nx_n & - b_1y_1 - \ldots - b_my_m \geqslant 0. &
\end{array}\right\}$$

Итак, предположим, что система (S') не имеет неотрицательных решений. Согласно следствию из теоремы о несовместных системах, найдутся неотрицательные числа $k_1, \ldots, k_m, l_1, \ldots, l_n, s$ (всего $m + n + 1$ число) такие, что *)

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}k_1 + \ldots + a_{m1}k_m + c_1s \leqslant 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{1n}k_1 + \ldots + a_{mn}k_m + c_ns \leqslant 0;
\end{array}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l}
- a_{11}l_1 - \ldots - a_{1n}l_n - b_1s \leqslant 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
- a_{m1}l_1 - \ldots - a_{mn}l_n - b_ms \leqslant 0;
\end{array}\right\} \qquad (2')$$

$$b_1k_1 + \ldots + b_mk_m - c_1l_1 - \ldots - c_nl_n < 0. \qquad (3)$$

Покажем прежде всего, что число s не равно нулю. В самом деле, допустим, что это не так, т. е. $s = 0$. Рассмотрим какое-либо неотрицательное решение $x_1^0, \ldots, x_n^0$ системы (1). Рассуждая, как при доказательстве леммы, найдем, что

$$(a_{11}k_1x_1^0 + \ldots + a_{mn}k_mx_n^0) + b_1k_1 + \ldots + b_mk_m \geqslant 0.$$

Но выражение, стоящее в скобках, $\leqslant 0$ (это получается, если умножить первое из неравенств (2) на

*) Числа $k_1, \ldots, k_m, l_1, \ldots, l_n, s$ — как раз те самые, на которые мы умножаем первое, второе, ..., $(m + n + 1)$-е неравенства системы (S'), чтобы получить (после сложения) противоречивое неравенство $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_1'y_1 + \ldots + a_m'y_m + d \geqslant 0$, где $a_1, \ldots, a_n, a_1', \ldots, a_m' \leqslant 0$, а d — отрицательное число.

x_1^0, второе — на x_n^0 и т. д., учтя при этом $s = 0$, а затем произвести сложение). Отсюда

$$b_1k_1 + \ldots + b_mk_m \geqslant 0, \tag{4}$$

после чего из (3) следует

$$c_1l_1 + \ldots + c_nl_n > 0.$$

Далее, умножая неравенства (2′) (где $s = 0$) на произвольное положительное число λ, получим

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda l_1 + \ldots + a_{1n}\lambda l_n &\geqslant 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}\lambda l_1 + \ldots + a_{mn}\lambda l_n &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Если теперь к каждому из неравенств (1), куда вместо $x_1, \ldots, x_n$ подставлены $x_1^0, \ldots, x_n^0$, прибавим соответствующее неравенство (5), то найдем, что числа

$$x_1^0 + \lambda l_1, \ldots, x_n^0 + \lambda l_n$$

также составляют неотрицательное решение системы (1). Значение функции f для этого решения равно

$$c_1x_1^0 + \ldots + c_nx_n^0 + \lambda(c_1l_1 + \ldots + c_nl_n),$$

и так как выражение в скобке строго положительно, то значение f неограниченно возрастает с ростом λ. Это означает, что $\max f = \infty$, т. е. задача А решения не имеет, вопреки условию.

Итак, s не равно нулю. В таком случае из (2) следует, что числа $\frac{k_1}{s}, \ldots, \frac{k_m}{s}$ составляют неотрицательное решение системы (1), из (2′) — что числа $\frac{l_1}{s}, \ldots, \frac{l_n}{s}$ составляют неотрицательное решение системы (1′), а из (3) — что для этих решений $\varphi - f < 0$. Но это противоречит лемме. Итак, предположив, что система (S) не имеет неотрицательных решений, мы приходим к противоречию. Следовательно, такие решения обязательно существуют, что и доказывает теорему двойственности.

Пример. Найти максимальное значение функции

$$f = 2x_2 + 12x_3$$

при условии, что переменные x_1, x_2, x_3 неотрицательны и удовлетворяют неравенствам

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + 2 &\geqslant 0, \\ -x_1 - x_2 - 4x_3 + 1 &\geqslant 0. \end{aligned}\right\}$$

Р е ш е н и е. Назовем поставленную задачу задачей А. Двойственная к ней задача (задача А′) должна

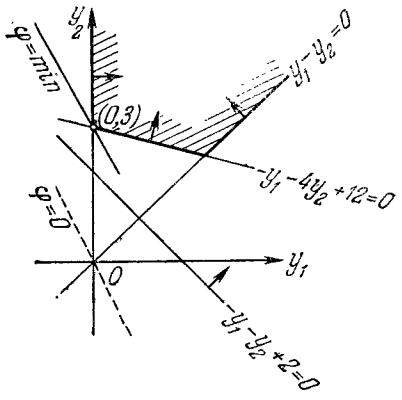

Рис. 48.

формулироваться так: найти минимальное значение функции

$$\varphi = 2y_1 + y_2$$

при условии, что переменные y_1, y_2 неотрицательны и удовлетворяют неравенствам

$$\left.\begin{aligned} y_1 - y_2 &\leqslant 0, \\ -y_1 - y_2 + 2 &\leqslant 0, \\ -y_1 - 4y_2 + 12 &\leqslant 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Задачу А′ можно решить графически, изобразив на координатной плоскости y_1Oy_2 область решений системы (6). Это сделано на рис. 48. На том же рисунке видно, что своего наименьшего значения функция φ достигает в точке (0, 3) — одной из вершин области. Это значение равно 3. По теореме двойственности максимум функции f тоже должен равняться 3.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3
§ 1. Несколько фактов из аналитической геометрии . . . 5
§ 2. Геометрический смысл системы линейных неравенств с двумя или тремя неизвестными 14
§ 3. Выпуклая оболочка системы точек 19
§ 4. Выпуклый многогранный конус 23
§ 5. Область решений системы линейных неравенств с двумя неизвестными 30
§ 6. Область решений системы с тремя неизвестными . . 43
§ 7. Системы линейных неравенств с любым числом неизвестных 52
§ 8. Решение системы линейных неравенств путем последовательного уменьшения числа неизвестных 57
§ 9. Несовместные системы 65
§ 10. Однородная система линейных неравенств. Фундаментальный набор решений 71
§ 11. Решение неоднородной системы неравенств 84
§ 12. Задача линейного программирования 87
§ 13. Симплекс-метод 95
§ 14. Теорема двойственности в линейном программировании 105

Цена 15 коп.

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вып. 1. **А. И. Маркушевич.** Возвратные последовательности.
Вып. 2. **И. П. Натансон.** Простейшие задачи на максимум и минимум.
Вып. 3. **И. С. Соминский.** Метод математической индукции.
Вып. 4. **А. И. Маркушевич.** Замечательные кривые.
Вып. 5. **П. П. Коровкин.** Неравенства.
Вып. 6. **Н. Н. Воробьев.** Числа Фибоначчи.
Вып. 7. **А. Г. Курош.** Алгебраические уравнения произвольных степеней.
Вып. 8. **А. О. Гельфонд.** Решение уравнений в целых числах.
Вып. 9. **А. И. Маркушевич.** Площади и логарифмы.
Вып. 10. **А. С. Смогоржевский.** Метод координат.
Вып. 11. **Я. С. Дубнов.** Ошибки в геометрических доказательствах.
Вып. 12. **И. П. Натансон.** Суммирование бесконечно малых величин.
Вып. 13. **А. И. Маркушевич.** Комплексные числа и конформные отображения.
Вып. 14. **А. И. Фетисов.** О доказательствах в геометрии.
Вып. 15. **И. Р. Шафаревич.** О решении уравнений высших степеней.
Вып. 16. **В. Г. Шерватов.** Гиперболические функции.
Вып. 17. **В. Г. Болтянский.** Что такое дифференцирование?
Вып. 18. **Г. М. Миракьян.** Прямой круговой цилиндр.
Вып. 19. **Л. А. Люстерник.** Кратчайшие линии.
Вып. 20. **А. М. Лопшиц.** Вычисление площадей ориентированных фигур.
Вып. 21. **Л. И. Головина и И. М. Яглом.** Индукция в геометрии.
Вып. 22. **В. Г. Болтянский.** Равновеликие и равносоставленные фигуры.
Вып. 23. **А. С. Смогоржевский.** О геометрии Лобачевского.
Вып. 24. **Б. И. Аргунов и Л. А. Скорняков.** Конфигурационные теоремы.
Вып. 25. **А. С. Смогоржевский.** Линейка в геометрических построениях.
Вып. 26. **Б. А. Трахтенброт.** Алгоритмы и машинное решение задач.
Вып. 27. **В. А. Успенский.** Некоторые приложения механики к математике.
Вып. 28. **Н. А. Архангельский и Б. И. Зайцев.** Автоматические цифровые машины.
Вып. 29. **А. Н. Костовский.** Геометрические построения одним циркулем.
Вып. 30. **Г. Е. Шилов.** Как строить графики.
Вып. 31. **А. Г. Дорфман.** Оптика конических сечений.
Вып. 32. **Е. С. Вентцель.** Элементы теории игр.
Вып. 33. **А. С. Барсов.** Что такое линейное программирование.
Вып. 34. **Б. Е. Маргулис.** Системы линейных уравнений.
Вып. 35. **Н. Я. Виленкин.** Метод последовательных приближений.
Вып. 36. **В. Г. Болтянский.** Огибающая.
Вып. 37. **Г. Е. Шилов.** Простая гамма (устройство музыкальной шкалы).
Вып. 38. **Ю. А. Шрейдер.** Что такое расстояние?
Вып. 39. **Н. Н. Воробьев.** Признаки делимости.
Вып. 40. **С. В. Фомин.** Системы счисления.
Вып. 41. **Б. Ю. Коган.** Приложение механики к геометрии.
Вып. 42. **Ю. И. Любич и Л. А. Шор.** Кинематический метод в геометрических задачах.
Вып. 43. **В. А. Успенский.** Треугольники Паскаля.
Вып. 44. **И. Я. Бакельман.** Инверсия.
Вып. 45. **И. М. Яглом.** Необыкновенная алгебра.
Вып. 46. **И. М. Соболь.** Метод Монте-Карло.
Вып. 47. **Л. А. Калужнин.** Основная теорема арифметики.
Вып. 48 **А. С. Солодовников.** Системы линейных неравенств.
Вып. 49. **Г. Е. Шилов.** Математический анализ в области рациональных функций.
Вып. 50. **В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг.** Разбиение фигур на меньшие части.
Вып. 51. **Н. М. Бескин.** Изображения пространственных фигур.
Вып. 52. **Н. М. Бескин.** Деление отрезка в данном отношении.
Вып. 53. **Б. А. Розенфельд и Н. Д. Сергеева.** Стереографическая проекция.